ゲーデルと20世紀の論理学（ロジック）

田中一之［編］

❸

不完全性定理と算術の体系

東京大学出版会

Gödel and Logic in the 20th Century ③
Incompleteness Theorems and Formal Systems of Arithmetic
Kazuyuki TANAKA, Editor
University of Tokyo Press, 2007
ISBN978-4-13-064097-8

刊行にあたって

今年 2006 年は，ゲーデルの生誕 100 年にあたる．19 世紀半ばのブールの仕事を近代論理学の出発点とみなすと，現在まで約 150 年の歴史のちょうど中間辺りで，20 代半ばの青年ゲーデルが不完全性定理を証明し，論理学(ロジック)に革命的転回をもたらしたことになる．

『TIME』誌が発表した 20 世紀の偉大な科学者・思想家 20 人（組）に，アインシュタイン，フロイト，ライト兄弟らと並んで，ゲーデル，そして論理学(ロジック)に関係の深いテューリングとウィトゲンシュタインが選ばれた．近隣分野から 3 人も名を連ねたことは，20 世紀の科学や思想の発展に論理学革命がいかに重要な役割を担い，またそれがいかに高く評価されているかを示している．

現代論理学の発展に寄与した人たちの多くは数学者である．ゲーデルは言わずもがな，ウィトゲンシュタインも流体力学という数学に近い分野から出発している．したがって，現代論理学の議論は否応なく数学的なのだが，数学の一分野に収まっているわけではない．ゲーデル自身，後半生は主に哲学を研究し，クワインやクリプキのように哲学サイドに立ちながら数理論理学に大きく貢献している研究者も少なくない．20 世紀の論理学(ロジック)の特徴はまさにこのような文理融合にあるのだが，このダイナミズムが文系・理系を分けたがる日本固有の文化のもとで敬遠や誤解を生む要因になっているとすれば大変残念である．また，この分野を「数学基礎論」と呼ぶ慣習が，わが国の論理学(ロジック)の健全な発展を妨げていると指摘する声があることも付言しておく．

本シリーズは，ゲーデルの生誕 100 年を記念し，彼の仕事を基点に 20 世紀の論理学(ロジック)の歩みを振り返り，公平な歴史認識のもとで，現代論理学の核となる概念や事実を立体的かつビビッド (vivid) に解き明かそうという試みで

企画された．そのため，数学と哲学の両面から解説を与えるという編集方針をまず打ち立てた．幸いなことに両陣営からご理解を得て，各分野の第一人者に執筆をお引き受けいただいた．前代未聞ともいえるこの試みが成功しているかいないかは読者諸賢の判断に委ねるしかないが，本シリーズの刊行を機縁に，論理学（ロジック）周辺のさまざまな分野の間に新しい対話が生まれることになれば，編者としてこれにまさる喜びはない．

すでに論理学（ロジック）について一通りの知識をお持ちの方にも，初めてふれる方にも興味をもって読んでいただけるように記述を工夫しているが，なかでも次世代を担う若い人たちには，全巻を読みこなし，広い視野と正しい認識をもつ新時代のロジシャンになっていただきたい．そしていつか「21 世紀のロジック」について，立派なシリーズが刊行されることを期待したい．

2006 年 6 月　編　者

はじめに

本書のテーマは，不完全性定理である．ゲーデル生誕 100 周年記念シリーズ『ゲーデルと 20 世紀の論理学（ロジック）』（全 4 巻）の刊行も好評のうちに後半に入り，この第 3 巻では，いよいよハイライトの定理と，それに関連した算術の形式体系の話題を扱う．

「不完全性定理」という名はいまでこそ広く知れわたっているが，30 年ほど前まではその内容を知る人が稀だったのみならず，定理の呼び名すらも固定していなかったのである．ゲーデルの原論文は，「『プリンキピア・マテマティカ』やその関連体系での形式的に決定不能な命題について，I」という題名が示すように，本来「決定不能性」を主題としたものである．この定理を解説した主要な教科書を振り返ってみれば，ヒルベルトとベルナイスの教科書（第 2 巻，1939）では「ゲーデルの導出不能性定理」，クリーネ (1952) は単に「ゲーデルの定理」，そしてショーンフィード (1967) で漸く「不完全性定理」と呼ばれている．

名は体を表すというが，「決定不能性」や「導出不能性」から「不完全性」への変遷はロジックにおける本質的な視点の転回を意味している．前二者の主体が命題であるのに対し，後者のそれは形式体系であり，この間に算術の形式体系に対するロジシャンの自立的な関心が育ったといえるだろう．そもそも 1 階論理上の自然数論を「ペアノ算術」と呼ぶようになったのもそう古いことではなく，少し前は「ヒルベルト算術」などという名も広く使われていたのである．

ゲーデルの定理への関心が決定不能性から不完全性に変わったことと連動して，その対極にあるヒルベルトの学説への関心も形式主義や証明論から「ヒ

ルベルトのプログラム」に変遷したようにみえる．ヒルベルト自身は，数学の基礎的な問題に対して幅広い関心をもっていたから，非常に逆説的には，「不完全性定理」と衝突する部分を，あとから「ヒルベルトのプログラム」と呼んだともいえるのである．とくに，1980 年代以降，フィファーマン，デトルフセン，ジャキントらが概念化した「ヒルベルトのプログラム」は，そのようなものだと私は思う．これについては，さらに「序」でくわしく検討しよう．

以下，本巻の構成と内容を簡単に示す．まず「序」では，不完全性定理に関する歴史的背景，証明の概要，定理の意義，その後の研究の動向などを概観する．さらに，完全性定理と不完全性定理の関係について述べ，付録として新しい独立命題の一例と，第 10 問題の否定解決について簡単に解説する．

第 I 部では，ゲーデルの不完全性定理の二つのバージョンに対して，できる限り平易で，かつ正確な証明を与える．執筆担当は，拙編『数学基礎論講義』(1997) で不完全性定理について定評のある解説を書かれた鹿島亮氏で，10 年前の解説を下地にさらにわかりやすく書き直していただいた．一般の入門書では省かれることが多い β 関数や証明可能性述語の詳細についてもきちんと書かれているので，初心者がすらすら読めるようなやさしさではないが，不完全性定理の証明技法を正しく理解するために最善の工夫が施されている．

第 II 部は，「ヒルベルトのプログラム」の現代版ともいわれている「逆数学プログラム」とその周辺の話題を概説する．執筆担当は，逆数学の若手研究者として活躍中の山崎武氏である．かなり盛りだくさんの内容で，まだ論文にもなっていないような最新の研究成果についての記述も多い．パリス・ハーリントンの独立命題についても，新しい研究成果をふまえた解説がなされている．

第 III 部は，いわゆるダイアレクティカ解釈によるペアノ算術の無矛盾性証明である．このゲーデルの結果には，計算機科学の方面からも強い関心がもたれているので，そちらに造詣の深い白旗優氏に執筆をお願いした．プログラム理論への応用や圏論との関係など多角的な視点からユニークな解説を与えている．

さて，次回の最終巻『集合論とプラトニズム』では，現代集合論の研究動向と，その底流にあるゲーデルの数理哲学を解説する．ゲーデルは，連続体

仮説などの解決策として，つぎつぎと強い巨大基数公理を追加して集合論の公理系を拡大していく，いわゆる「ゲーデルのプログラム」を提唱した．しかし，本巻の序でみるように，このアイデアは不完全性定理の論文の脚注 48a にすでに含まれているものであった．

彼の仕事はどれもが非凡な業績であるが，それらをつなぎ合わせたとき，このロジシャンの大いなる構想が浮かび上がってくるのである．

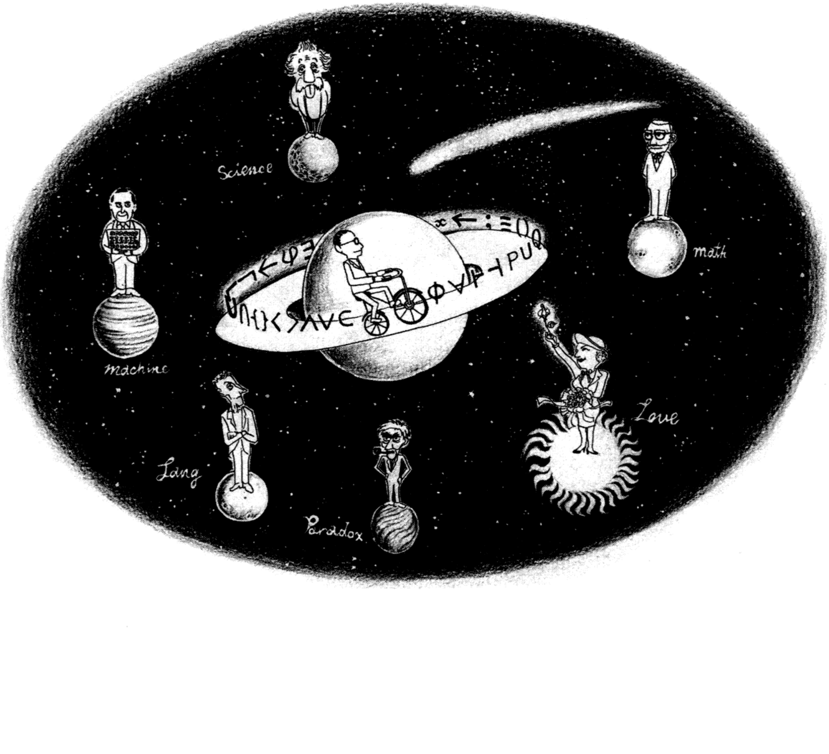
2007 年 1 月　編　者

目 次

序

ゲーデルの不完全性定理とその背景

田中一之



ゲーデルの不完全性定理は，20 世紀に発見された数学の定理として，かなり特異な状況におかれている．一般知識人の間で群を抜いて有名であるにもかかわらず，数学のコンテクストで厳密な扱われ方をすることが少なく，じつに妄想的ともいえるような比喩や牽強附会の説が広く蔓延している．この傾向は，とくにフランスと日本で顕著であるようだ．

ソーカルとブリクモンの共著書『「知」の欺瞞』[ソーカル・ブリクモン 2000] は，「ゲーデルの定理こそは汲めども尽きぬ知的濫用の泉である」(p.234) と称し，人文社会科学領域の文献におけるジョークのような濫用例をいくつも挙げている．そのようなポストモダン現象を追うことがわれわれの目的ではないので，無用の混乱を避けるために，ここではあえて「ゲーデルの定理」に関する実例は引かない．代わりに，並んで頻出する「選択公理」についてのソーカルの創作例を一つ示しておこう．これは，ある専門誌に受理されてしまった彼の有名な悪戯論文に含まれる「注 (105)」である．

> リベラルなフェミニストがしばしば女性の社会的・法的な平等 (equality) と「出産/中絶の選択権」を保証する最低限の条項に甘んじているのとちょうど同じように，リベラルな数学者が（さらに社会主義の数学者さえもが）今日支配的なツェルメロ＝フレンケルの公理系（これは十九世紀の自由主義を反映して等号=平等 (equality) の公理を採用している）に「選択公理」だけを付け加えたものに甘んじて研究に携わっていることが多い．しかし，はるか以前にコーエン (Cohen 1966) が証明したように，この公理系は解放の数学のためにはまったく不十分である．[上掲書，p.315]

このように，数理論理学の専門用語は，フランス思想界で一時流行となった「ポストモダニズム」における格好の装飾素材となってしまった（[ブーブレス 2003] も参照）．それらが言葉の遊びになってしまう理由の一つとして，フランスや日本にはロジックや数学基礎論の専門知識をもつ人がきわめて少ないという事情があるだろう．上掲書のコメントの中にも，つぎのような文言がみられる．「数学基礎論のようなあまり人の研究しない分野は数学研究の

大部分にほとんどインパクトを与えていない」(p.183).

一方，ゲーデルが後半生の 37 年間を過ごしたアメリカでは，情況は少し異なる．主要な大学の数学科や哲学科にはロジックの研究者がたくさん名を連ねているし，学生たちにもロジックの人気は高いようだ．したがって，ゲーデルの知名度は一段と高く，彼や彼の仕事についての優れた出版物も確かに多い．ポストモダニズムに異義を唱えたソーカルも，アメリカの数理物理学者である[1)]．しかし，一般のアメリカ人はゲーデルの定理をどこまで正しく理解しているだろうか？

ゲーデルの定理についてのアメリカ型キャッチコピーのなかでも，とくに有名なフレーズは，プリンストン高等研究所の所長だったオッペンハイマーが，ゲーデルの 60 歳を祝うシンポジウムにおいて，彼に贈った言葉の中にある．

> 彼（ゲーデル）の偉大な仕事は，数学における非常に抽象的な議論の論理構造をはかりしれないほど深め，かつ豊かにしたばかりでなく，人間の理性一般において限界の役割を照らし出した．[Bulloff *et al.* 1969, pp.129–130]

非専門家による祝辞であるから，これくらいの誇張表現は許されるだろう．しかし，その後「理性の限界」というフレーズだけが一人歩きしてしまい，多くの一般人はゲーデルの定理がそういう内容をもつものだと思い込んでしまったようである．

他方，ネーゲルとニューマンによるポピュラーな入門書『数学から超数学』の結論部分には，次の文句がある．

> この定理（ゲーデルの定理）は，人間の心（理性）の構造と能力は，かつて考えだされたどんな無生命の機械よりも，はるかに複雑，巧妙であることを示しています [ナーゲル・ニューマン 1985].

ここでは，「理性の限界」とは正反対に，理性の超越性が証明されたことになっている．ネーゲルらの主張は反機械論と呼ばれ，その後もルーカスやペンローズなどが同様な論拠で機械に対する人間の優越性を訴えている（この議論の問題点については，本シリーズ第 1 巻第 II 部の解説を参照せよ）.

1) A. ソーカルは，現在イギリスの UCL（ユニバーシティ・カレッジ・ロンドン）の教授.

それにしても，なぜ数学の一定理に対して，このように多様な解釈が生まれるのであろうか？　通常の数学的定理は特定の理論内のドメスティックな事実を述べているのに対して，ゲーデルの定理はあらゆる理論（所与の条件を満たす任意の公理系）を対象としたユニバーサルな事実（メタ数学についての定理，もしくはメタメタ定理）を主張しているからであろう．

大雑把にいえば，「どんな公理系にも証明も反証もできない命題がある」というのが，ゲーデルの定理（第一不完全性定理）の主張である．「どんな公理系」といっても，満たすべき数学的条件は論文の中できちんと規定されている．したがって，人間の理性一般が公理系とみなせるなら，その範囲ではゲーデルの定理は適用できるが，その前提が成り立つかどうかは，定理の主張そのものとは別に検討されるべきものなのである．以上が本論に入る前の一般的注意である．

ここからが本題であるが，1931 年に発表されたゲーデルの原論文を手に取ってみれば，これが公理系の不完全性を主題にしたものではなく，公理的手法によって決定できない算術命題の存在を示したものであることがわかる．実際，この論文の中に「不完全」という言葉が現れるのは，校正時に追加されたと思われる脚注 48a のみである．つまり，ゲーデルの定理は命題の決定不能性定理として証明されながら，公理系の不完全性定理として世の中に受け入れられていったといえるだろう．

当時のゲーデルが，公理系の（不）完全性に関する事実よりも，論理式の恒真性や充足可能性を判定する「決定問題」を重要と考えていたことは，このあとも後者に関する研究を続けていることからも明白だと思う．そして，この決定問題への情熱こそ，ヒルベルトから受け継いだものだといえるのである．ヒルベルトは，アッケルマンとの共著書 [ヒルベルト・アッケルマン 1954] で，

> これ（決定問題）が数学的論理学の中心問題である（伊藤訳，p.124）

と述べている．

ロジックというと，論理記号を扱うだけの学問にみられがちであるが，ゲーデルの定理を契機として，メタ数学の数学化によって計算可能性あるいは不

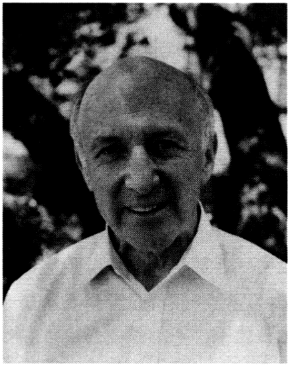


図 **0.1**　ヘンキン (© George Bergman)

可能性という概念が創出され，新しい研究分野（再帰理論あるいは計算可能性理論）が誕生した．これは，その後，コンピュータの誕生・発展に大きく貢献し，現代ロジックにおける主要な 4 分野[2)]の一つにもなっている．

この序の草稿を手直ししている段階で，恩師の一人のヘンキン先生[3)]の訃報が届いた．1980 年代，私はヘンキン先生のティーチング・アシスタントをしていたことがあり，個人的にもいろいろご親切を受けたので，たいへん悲しい知らせである．ヘンキン先生は，「ロジックは数学の一分野なのだ」という持論をよく口にされていた．反・論理主義を掲げた先生の有名な論説 [Henkin 1962][4)]をいま読み返してみると，先生のクリアな声音が聞こえてくるようでたいへん懐かしい想いがする．ついでながら述べると，この論説に

2) 他の 3 分野は，証明論，モデル理論および集合論．[Barwise 1977] 以後定着した分類法である．

3) レオン・ヘンキンは，1921 年 4 月 21 日ブルックリン生まれ．1947 年に，プリンストン大学のチャーチのもとで，型理論の完全性定理により博士号を取得．1953 年よりカリフォルニア大学バークレー校で教鞭を執り，タルスキとともにロジックのバークレー学派を築いた．数学教育や教育行政についても多くの功績がある．1991 年に名誉教授．2006 年 11 月 1 日カリフォルニアにて逝去．

4) ヘンキンは，この論文でアメリカ数学協会 MAA からショーヴォネ賞 (Chauvenet Prize) を授賞．

関連して，ヘンキンとラッセルの間で手紙のやり取りがあり，ラッセルがゲーデルの定理をまったく理解していないことが露見されるというオチがあった(ラッセルからヘンキンへの手紙は，[Grattan-Guinness 2000] に所収).

さて，本序は，三つの節と二つの付録で構成される．最初の節では，不完全性定理に関する歴史的背景を説明する．第 III 部でも，当時の数学基礎論の三つの立場が説明されるが，ここでは少し違った角度から，人物を中心において述べよう．0.2 節では，ゲーデルの証明の概要と，その特徴について述べる．とくに強調しておきたいことは，完全性定理，不完全性定理，連続体仮説の相対無矛盾性などのゲーデルの仕事は，すべて根底でつながっていることである．今日，ロジックは四つの大分野の他，さまざまな小分野に分かれ，一見ばらばらでありながら，それでも一つの学問分野たり得るのは，このような根っこのつながりがあるからであろう．0.3 節は，ゲーデル以降の不完全性定理に関する研究の紹介である．とくに，完全性定理と不完全性定理の関係について掘り下げて述べよう．さらに，不完全性定理に関連した二つの話題を付録とした.

0.1　背景

ゲーデルは，1929 年に完全性定理の論文を完成させ，1930 年の夏に不完全性定理の証明のアイデアを得ている．そして，1930 年 9 月 5–7 日にケーニヒスベルグ大学で開かれた精密科学認識論会議において，6 日に完全性定理について 20 分の講演を行い，翌日のディスカッション・セクションで不完全性定理のアイデアを初めて公表した.

このように完全性定理と不完全性定理の発見と発表は時間的に重なっているので，それらの背景もオーバーラップする部分が多い．したがって，ここでの解説も先行巻の内容のくり返しになる部分があることを，お許しいただきたい.

19 世紀末から 20 世紀初頭にかけ，フレーゲは算術の真理を論理法則（クラス理論あるいは集合論を含む）に還元しようとしていた．彼にとって論理

法則は疑いのない確実なものであるはずだったが，そこにパラドクスが潜んでいることをラッセルに指摘された (1902)．そのショックで彼は論理主義から撤退してしまうのだが，その立場を引き継いだラッセルは，師ホワイトヘッドとともに，さらに大胆に論理主義プログラムを推し進め，数学全体を論理に還元しようともくろんだ．彼らは，新しい（分岐）型理論を打ち立て，『プリンキピア・マテマティカ』（以下，単に『プリンキピア』と呼ぶ）という大部の 3 巻本を著した (1910–13).

『プリンキピア』の体系には，知られているパラドクスへは防護策がとられているものの，新たなパラドクスを生じないという保証はなかった．ラッセルは，『プリンキピア』で導出される命題がすべて正しいという経験的事実によって，その公理の正しさを帰納的に保証しようとした．が，それだけでは，自明でない公理（例：還元可能性公理）を仮定する理由として十分ではなかった．というよりも，自明でない公理を設定すること自体，論理によって数学に確実性を与えるという本来の目的に反するものであった．

数学界の頂点にいたヒルベルトは，1900 年にパリで行われた国際数学者会議で，20 世紀の数学の発展に重要となる 23 の未解決問題（のうち 10 個）を発表した（[杉浦 1997] 参照）．第 1 問題はカントルの連続体仮説，第 2 問題は実数論の無矛盾性，そして第 10 問題はディオファントス方程式の可解性の決定問題である（付録 2 参照）．これらによって数学におけるロジックの役割が急上昇する．しかし，ヒルベルト自身は 1904 年のハイデルベルグ会議で第 2 問題への取り組みを披露したくらいで，それから 10 年余はもっぱら関数解析や数理物理の研究に専念していた．

しかるに，ヒルベルトは 1917 年 9 月のスイス数学会で忽然と「公理的思考」という熱のこもった講演を行った．この講演で，彼は第一次世界大戦の長期化に伴うドイツ帝国崩壊の危機と数学の基盤の揺らぎを重ね合わせていた．講演の冒頭で，「国家の繁栄のためには内部秩序の確立とともに隣接諸国との関係が重要であるように，数学の繁栄には物理学や認識論との関係が欠かせない」と述べた．そして，その関係において，本質的かつ有効なのが公理的方法であると主張した．また，そこで彼はラッセルの論理主義に一定の評価をしつつ，つぎのように述べている．

> しかし，この（ラッセルの論理学の）完成にはなお新しい，かつ多方面の研究を要するであろう．さらに精細に考えるとわかることは，整数および集合の場合における無矛盾性の問題は，それが単独に孤立した問題ではなくて，数学独特の色彩を帯びた最も困難な認識論の問題の大領域に属することである：この問題群を特徴づけるために私は**数学の問題の解法可能性の原理**の問題，数学研究の既成成果の**補正可能**の問題，数学的証明の**簡単さの判定条件**を求むる問題，数学および論理学における**内容と形式**との関係の問題，そして最後に有限個の操作による数学問題の**決定可能**に関する問題を列挙しよう．
>
> そしてわれわれはこの種のすべての問題が統一的に理解され，かつ説明されないうちは論理学の公理化に満足することはできない．
>
> 上に挙げた諸問題のうちで特に最後の有限個の操作による決定問題に関する問題は，それが数学的思惟の本質に触れるところがあるので，最もよく知られまた最も多く論ぜられるところである．[ヒルベルト 2005, pp. 204–205．強調は原文のまま]

ヒルベルトにとって，公理化は道具であり，無矛盾性は最初の関門であり，最終的なねらいは決定問題にあったといえるだろう．なお，ここでの決定問題は，論理式の真偽決定問題よりも，第 10 問題のような数学的内容をもつものがイメージされている．ヒルベルトが決定問題に関心をもった背景については，論文 [Mancosu 1999] にくわしい．

1917 年，ヒルベルトは，チューリッヒ大学でツェルメロ教授の助手をしていたベルナイス（ツェルメロは病気のため 1916 年で退職）を助手に採用した．これ以降のヒルベルトの数学基礎論についての研究は，ほとんどがベルナイスとの共同作業である．ヒルベルトは，1917 年から 1922 年までに数学基礎論の講義を 3 回担当したが，すでに 1917–18 年冬学期の講義において，10 年後にアッケルマンの共著として出される本 [ヒルベルト・アッケルマン 1954] の内容の大部分を含んでいたという．

また，1922年から1928年にかけて，ヒルベルトは五つの国際会議で，数学基礎論についての新しいアイデアをつぎつぎ披露した．1922年のコペンハーゲン講演，ライプツィヒ講演については，[Ewald 1996] に英訳がある．1925年のミュンスター講演，1927年のハンブルグ講演，1928年のボローニャ講演については，[ヒルベルト 1970] に和訳がある．しかし，ミュンスター講演「無限について」は簡約改訂版からの和訳であり，オリジナルは [van Heijenoort 1967] に英訳がある．

さて，今日「ヒルベルトのプログラム」というと，有限の立場で数学の無矛盾性を証明する計画とみなされる．しかし，ヒルベルトのねらいはもっと大胆であって，数学の基礎的な問題をすべて引っくるめて「証明論（独：Beweistheorie）」で解決しようともくろんでいた．どんな難問も記号の世界に投影させれば，有限の組み合わせ問題として解けるはずだと考えたのである．とくに1925年の講演「無限について」では，証明論によって連続体仮説に挑戦している．他方，次節でみるようにゲーデルも，少なくとも不完全性定理を発見した時点では，（狭い意味での）「ヒルベルトのプログラム」をほとんど念頭においていない．つまり，ヒルベルトのプログラム vs. ゲーデルの不完全性定理というよくある対立軸は，後付の説明ともいえるのである．

ゲーデルが参加したケーニヒスベルグの精密科学認識論会議では，初日（1930年9月5日）に，数学基礎論の三つの立場（論理主義，直観主義，形式主義）について，それぞれカルナップ，ハイティング，フォン・ノイマンが1時間ずつ説明した．その三つの講演の英訳が，論文集 [Benacerraf and Putnam 1983] に収められている．そしてこの3人との関わりが，ゲーデルのその後の研究姿勢を決定したといってもよい．

すでにゲーデルと日常的に交流をもっていたのは，カルナップである．彼は1926年にウィーン大学で職を得るまで，あちこちの大学を転々として哲学と物理学を勉強してきたが，とくにフレーゲ，バウフ，フッサールに師事している．1922年，インフレで『プリンキピア』が入手できず，ラッセルに手紙を送って，35頁の要約を書いてもらったという逸話がある．なお，1930年1月に，ラッセルの後継者とみなされていたラムジーが早死にしており，カルナップの講演の半分はラムジーの研究の紹介にあてている．

1928 年にゲーデルが本格的にロジックの研究を始めたとき，カルナップは彼の先生役であり，ゲーデルは 1928–29 年度にカルナップの講義に出席していた．完全性定理，不完全性定理の二つの論文で，ゲーデルが『プリンキピア』を題材にしているのはカルナップの影響であることは間違いない．

ゲーデルは，博士論文のなかで，2 階論理に対して完全性定理が成り立たないだろうと予言していたことを本シリーズ第 2 巻の序で述べた．その議論の中心には，統語論的完全性 (Entscheidungsdefinitheit) と範疇性 (monomorphicity, categoricity) と間の関係が使われるが，この関係は，まさに当時のカルナップが考察していたものである [Goldfarb 2005].

しかし，博士論文を書いた後では，ゲーデルのほうがカルナップに教えることが多くなったようである．1930 年 2 月にタルスキがウィーンを訪問したときの話が，ワンの本にある．

> タルスキーはゲーデルとともに別個のメタ言語を使う必要性をカルナップに納得させたようだ．その一歩は，ゲーデルがすでに前年に勧めていたものであったが，カルナップと他のウィトゲンシュタインの追従者たちはそれに乗り気ではなかったのだった．[ワン 1995, p.130]

ゲーデルは，ケーニヒスベルグの会議に行く前に不完全性定理の結果をカルナップに伝えていたし，それを得る途中段階でもカルナップに報告していた．しかし，カルナップの講演には，ゲーデルの名前や結果はなく，彼はその重要性を認識するには至らなかったようである．

つぎは，ハイティングである．彼はブラウワーの弟子で，直観主義を公理化するとともに，その立場を普及させる努力をしていた．ところで，ゲーデルの兄貴分である数学者メンガーは，アムステルダムのブラウワーのところで 2 年間修行を終え，1927 年からウィーン大学の助教授になったところであった．メンガーはブラウワーと意見が対立していたが，直観主義の情報をもっていてそれが学生時代のゲーデルにも影響を与えたのかもしれない．しかし，1931 年以降，ゲーデルが直観主義に関して行ったいくつかの仕事では，ブラウワーの思想よりも，ハイティングの形式化に多くを依存するものであった．



図 **0.2**　フォン・ノイマン

また，ハイティングとゲーデルは，共同で数学基礎論の解説文を書く計画をもったが，それは実現しなかった．

最後に，フォン・ノイマンである．1926 年にブダペスト大学で博士号を取得した彼は，ベルリン大学やハンブルク大学で私講師をし，会議の時点では，すでに米国のプリンストン大学に移ることが決まっていた．ゲッチンゲンのヒルベルトとは，集合論の公理化をテーマとした博士論文を作成していた頃からよく交流していた．フォン・ノイマンは，1927 年にヒルベルトの無矛盾性プログラムに対して重要な部分的成果を上げており，この問題の全面解決に向けて奮闘を続けていた．ケーニヒスベルグでの彼の講演は，修正のない純粋な「ヒルベルトのプログラム」が一般向けに明確な言葉で説明された最初で最後の機会であろう．

ケーニヒスベルグでの出会いを通して，ゲーデルはフォン・ノイマンからヒルベルトのプログラムを学び，フォン・ノイマンは自ら取り組んでいた無矛盾性プログラムが実現不可能であることを理解した．しかし，フォン・ノイマン以外のヒルベルト周辺の人たちや，そしてゲーデル自身も，ゲーデルの発見でヒルベルトの計画がダメになったとは考えなかった．ゲーデルについていえば，この時点からヒルベルトの論文を精細に検討し，ヒルベルトの

プログラムに対する彼流の解釈まで考案したのである．それは，一言でいえば，相対矛盾性を証明することになるであろう [ゲーデル全集 III のツィルゼル講演メモ（とくに pp.86–87)]．大きな理論 T の無矛盾性 $\mathrm{Con}(T)$ を小さい理論 t のそれ $\mathrm{Con}(t)$ に還元すること，つまり $\mathrm{Con}(t) \rightarrow \mathrm{Con}(T)$ を示すことである．ゲーデルは，この考え方で，選択公理と連続体仮説を含む集合論の無矛盾性を，それらを含まない集合論の矛盾性から証明した（本シリーズ第 4 巻参照)．また，ペアノ算術の矛盾性を，原始再帰的汎関数の理論のそれに還元した（本巻第 III 部参照)．

さて，3 人が三つの立場の説明を行った翌日の 9 月 6 日に，ゲーデルは完全性定理について 20 分の講演をした．その講演のメモが，『ゲーデル全集』III に収録されている．それによると，講演の最後で，博士論文の序と同じように，統語論的完全性と範疇性との間の関係を述べたあと，以下のように完全性定理を高階に拡張できないと結んでいる．

> しかしながら，完全性定理のそのような拡張は不可能です．というのは，私が最近証明したように，『プリンキピア』で表現できるにもかかわらず，その論理的仕組みでは証明できない数学の問題があるからです．ここでは，還元可能性公理や無限公理（「可算無限個のものが存在する」)，そして選択公理も公理として仮定しておきます．この結果はつぎのようにもいえます．ペアノの公理系に，『プリンキピア』の論理を上部構造として加えたものは，統語論的に完全でない．しかし，これらにこれ以上くわしく立ち入るのは，本題からあまりに離れてしまうでしょう．[ゲーデル全集 III, pp.28–29]

付言しておくと，完全性定理の「完全性」は，恒真な命題がすべて導出できることで，「意味論的完全性」ともいう．不完全性定理の「完全性」は，そこから導出できない論理式を一つでもそれに加えると矛盾するということで，「統語論的完全性」と呼ばれる．

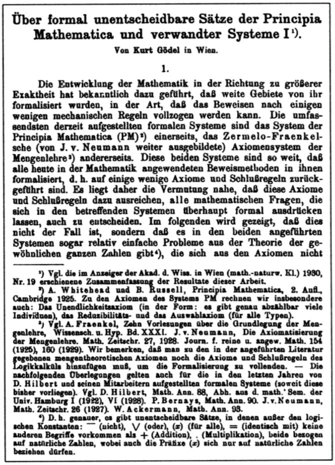
0.2　論文の概要と特徴

ゲーデルの論文に対しては，二つの和訳 [廣瀬・横田 1985; 林・八杉 2006]，および原典解説に近いくわしい教科書 [前原 1997] がある．また，本巻の第 I 部では不完全性定理を現代的な立場からていねいに解説しているので，ここでは単に内容をなぞるのではなく，いくつかのキーポイントに焦点をあてて，この論文の特徴と意義を説明したいと思う．

まず，論文の題名は，「『プリンキピア・マテマティカ』やその関連体系での形式的に決定不能な命題について，I」である．ここで『プリンキピア・マテマティカ』は，ホワイトヘッドとラッセルによる同名の本の中で構築された型理論の体系であり，「その関連体系」としてはツェルメロ・フレンケルの公理的集合論が本文中に例示されている．しかし，この論文の結果はそのような大掛かりな公理系だけに適用されるものではなく，あとで述べるように，その中で自然数の計算が実行できるような形式体系であれば，ほとんど何であっても良い．また，この題目からは，主題が決定問題への取り組みであること，パート II も予定されていたことなども読みとれる．

さて，この論文は，四つの節で構成されている．第 1 節は導入部であり，定理の背景や証明の主要なアイデアが概観される．良い論文の見本ともいえるような読みやすさで書かれているので，最初のパラグラフのほんのさわりだけみておくことにしよう．

> 数学は一層の厳密性を目指して進化し，周知のように，その大部分を形式化するにいたった．すなわち，僅かな機械的規則によって証明が実行できるような数学の形式化が達成されたのである．（中略）これらの二つの体系（プリンキピアの体系とツェルメロ・フレンケルの公理系）は十分に完成されたものであり，今日数学において使用されるすべての証明法が，それらの内部で形式化されるほどである．（中略）したがって，これらの体系の内部で形式的に表すことができるすべての数学的問題を決定するためには，



Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I[1].

Von Kurt Gödel in Wien.

1.

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der Principia Mathematica (PM)[2] einerseits, das Zermelo-Fraenkelsche (von J. v. Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre[3] andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, alle mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt[4], die sich aus den Axiomen nicht

[1]) Vgl. die im Anzeiger der Akad. d. Wiss. in Wien (math.-naturw. Kl.) 1930, Nr. 19 erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

[2]) A. Whitehead und B. Russell, Principia Mathematica, 2. Aufl., Cambridge 1925. Zu den Axiomen des Systems PM rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

[3]) Vgl. A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre, Wissensch. u. Hyp. Bd. XXXI. J. v. Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschr. 27, 1928. Journ. f. reine u. angew. Math. 154 (1925), 160 (1929). Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden. — Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen). Vgl. D. Hilbert, Math. Ann. 88, Abh. aus d. math. Sem. der Univ. Hamburg I (1922), VI (1928). P. Bernays, Math. Ann. 90. J. v. Neumann, Math. Zeitschr. 26 (1927). W. Ackermann, Math. Ann. 93.

[4]) D. h. genauer, es gibt unentscheidbare Sätze, in denen außer den logischen Konstanten: $^-$ (nicht), $\vee$ (oder), (x) (für alle), $=$ (identisch mit) keine anderen Begriffe vorkommen als $+$ (Addition), . (Multiplikation), beide bezogen auf natürliche Zahlen, wobei auch die Präfixe (x) sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.

図 0.3　「不完全性定理」の論文 [Gödel 1931]

その公理と推論規則で十分である，と予想するのは自然なことである．しかし，以下において示すように，事実はこれに反する．それどころか，普通の整数の理論における比較的単純な問題でありながら，これら両体系の公理から決定することができないようなものさえ存在する．（林・八杉訳）

続く二つのパラグラフで証明の概要を説明し，最後にここでの議論が，リシャールのパラドクスや嘘つきのパラドクスと密接に関係することを述べている．このサービス精神がかえってあだになったのかもしれない．不完全性定理の本質がこれらのパラドクスであるという安易な見方が広まってしまったようである．しかし，ゲーデルは，脚注 14 で，決定不能な命題の存在は，どんな認識論的パラドクスを用いても導けるだろうと述べている．つまり，ここでの議論は，前述のパラドクスに類する構造をもっているが，それは定理の本質ではないということである．ゲーデルの定理とパラドクスの関係は次節でさらに検討しよう．

第 2 節はもっとも長い節で，技術的議論が展開される．最初にプリンキピ

アの簡易版として，P という体系が定義される．これは，自然数論をベースにした型理論の体系，つまり高階算術である．つぎに P の記号に自然数をわりふり，P のメタ数学的概念を原始再帰的関数を用いて形式化する，いわゆる「ゲーデル数」の概念が導入される．そして，定理 I–IV で原始再帰的関数の基本性質を確認し，定理 V で原始再帰的関係が P で（数項別に）表現可能であることを示す．これから，第一不完全性定理（定理 VI）を導くのは，いまでは標準的な議論である．ただし，対角化定理や真理の定義不可能性については，1934 年の講義録で初めて明確に述べられる．このあと，P 以外の体系への一般化や ω 無矛盾性について議論される．しかし，ω 無矛盾性の導入は，やや唐突である．タルスキの論文「ω 無矛盾性と ω 完全性の概念についての所見」(1933) では，1927 年にはタルスキはこれらの概念をすでに得ていたと主張する一方で，ω 無矛盾性を最初に定義したのはゲーデルであると認めている．これについて，ゲーデルは何も語っていないが，二人の依存関係はこれから話すことでも謎めいたところがある．

ここで注目されるのが，第 2 節の最後につけられた脚注 48a である．この番号は，この脚注が校正のときか何かで後から挿入されたことを表している．すでに述べたように，「不完全性」という言葉が現れる唯一の場所であり，肝要なところなので，全文を訳しておこう．

> この論文のパート II で示されるように，数学のすべての形式体系に不完全性が付いてまわる真の理由は，どんな形式体系においても高々可算個の型しか扱えないのに，より高い型を構成する操作は超限的にくり返せるということにある（ヒルベルト『無限について』をみよ）．つまり，ここで提示された決定不能命題も，さらに高階の型を適当に加えること（たとえば，体系 P に型 ω を加えること）によって決定可能になるのである．同様なことは，集合論の公理系についても成り立つ．

重要なポイントがいくつかある．まず，引用されているヒルベルトの『無限について』であるが，これは 1925 年にミュンスターで催されたワイエルシュトラス追悼集会におけるヒルベルトの講演録（[van Heijenoort 1967] に

所収）である．その講演の後半で，証明論的手法による連続体仮説への取り組みが披露されるが，普及本『幾何学基礎論』の付録に載ったバージョン（[ヒルベルト 1970]）では，その部分は削除されている（p.9 をみよ）．

ゲーデルは，1938 年に（一般）連続体仮説の（相対）無矛盾性を証明している．ゲーデルはヒルベルトの方法を熟知し，それを参考にしたことは，この注でも明白である．また，のちにいわゆる「ゲーデルのプログラム」（本シリーズ第 4 巻参照）を打ち出す芽もここにみられる．とくに強調しておきたいことは，完全性定理，不完全性定理，連続体仮説というゲーデルの仕事が，独立した土台の上で行われているわけでなく，根底で強く関係し合っていることである．

ゲーデルは 1 階論理の完全性を証明した博士論文のなかで，2 階論理については同様の定理が成り立たないだろうと予言していた．本シリーズ第 2 巻の序でも述べたことだが，重要なところであるから，もう一度要点を復習しておこう．

2 階自然数論 PA_2 のモデルはすべて同型であるということを，デデキントが証明している．ここでの 2 階論理のモデルは，1 階論理のモデルの上で，2 階量化子の変域を 1 階領域のベキ集合（部分集合全体）とみなして定義されるものである．2 階自然数論 PA_2 では，とくに数学的帰納法が 2 階論理の言語で，「任意の自然数の集合について，最小元 0 を含み，各要素の後続者が再び要素になっていれば，すべての自然数を含む」と記述される．

もし PA_2 から証明も反証もされない命題 α が存在すれば，$PA_2 + \neg\alpha$ も $PA_2 + \alpha$ も無矛盾である．そうすると，2 階論理の完全性定理が成り立てば，$PA_2 + \neg\alpha$ のモデルも，$PA_2 + \alpha$ のモデルも存在することになる．しかし，デデキントの定理から両者は同型であるから，一方で α が成り立たず，他方で成り立つということは不可能である．これによって，ゲーデルは 2 階論理には完全性定理が成り立たないと予想しており，2 階自然数論が不完全である可能性も想定していたことがわかる．

不完全性定理の発見について，ゲーデル自身の言葉を，[Wang 1996, pp.82–83] が記述している．〔　〕内の補足は，田中による．

1930年の夏に，古典解析学〔2階自然数論〕の無矛盾問題を研究し始めた．なぜヒルベルトが，解析の無矛盾性を直接有限的手法で証明しようとしたのかは謎である．私には，二つの異なる問題にみえた．つまり，自然数論の無矛盾性を有限的自然数論で証明することと，解析の無矛盾性を自然数論で証明することである．困難を分ければ，それぞれの部分はもっと扱いやすくなるだろう．有限的自然数論の世界は定義がはっきりしなかったから，私は後半の問題，つまり自然数論のフルシステムに対する解析の相対的無矛盾性の証明に取り組み始めた．(中略)

私は，まず実数〔自然数の集合〕を自然数論において述語で表したが，そうすると解析の公理の妥当性を示すには，〔自然数についての〕真理の概念を用いなければならないことがわかった．与えられた形式体系における記号や文，そして証明を数え上げることにより，自然数論における真理は自然数論の中では定義できないという考えにすぐ到達した．もし真理がそれ自身の形式体系で定義できてしまうと，嘘つきのパラドクスのようなものから，体系の矛盾が示せるからである．(中略)

〔真理が定義できないという〕この議論を形式化すれば，決定不能命題の存在はいえるが，その具体例は得られない．真理とは違って，与えられた形式体系における証明可能性は，その体系の文についての明確な組み合わせ的性質であり，適切な初等的手段により形式的に明記できるものである．1930年の夏に私は，合理的な形式体系はどれでも，そこで証明可能性が文の性質として表現できるものであれば，決定不能な命題が存在することを示した．

ゲーデルは，この結果を9月にケーニヒスベルグの会議における討論部会で報告する．そのときの彼自身の理解は，つぎのようだったと述べている．

私がもっていたのは，組み合わせ的な決定不能命題にすぎなかった．原始記号を自然数で表し，証明を自然数の列の列で表してい

ただけである．その決定不能命題は，型理論の部分体系では与えられても，自然数論で直接与えることはできない．私は，フォン・ノイマンと個人的に話し合った．彼は，最高に面白い結果だといい，熱中した．そして，この命題が自然数論で表現できるかと質問してきたので，私はつぎのように答えた．もちろん，それらは自然数に移すことができるが，そうすると〔自然数論においてまだ馴染みのない〕新しい関係が現れるでしょう．（中略）決定不能命題が多項式についての命題に変換できるという結果は，確かに予想外であったが，私が一人で証明したものである．これは，フルトベングラーの講義によって刺激された，若い頃の私の数論への興味と結びついている．

さて，ゲーデルは決定不能命題を自然数論の命題に変え，同時にどんな形式体系の無矛盾性もその体系では証明できないこと（第二不完全性定理）のアイデアを得た．これらの結果をまとめた論文は 10 月 23 日に投稿され，11 月 17 日に受理された．

他方，プリンストンに移ったフォン・ノイマンは，独自に考察をすすめて，やはり第二不完全性定理に到達した．その結果は，11 月 20 日付けでゲーデルに送られた手紙に書かれている [ゲーデル全集 V].

ゲーデルは，自分の結果がヒルベルトのプログラムを頓挫させるものだとは思っていなかった．この点において，フォン・ノイマンは違った．彼は，すぐにヒルベルトのプログラムの終焉を察知した（ゲーデルへの 11 月 29 日付け私信）．むしろ，ゲーデルは，フォン・ノイマンとの交流を通じて，ヒルベルトのプログラムを勉強しはじめたというのが正しいようである．

だいぶ回り道をしてしまったが，不完全性定理の初期のバージョンは，タルスキの真理定義不可能性定理とほとんど同じだったといえる．タルスキの定理は 1931 年と 1933 年のポーランド語の論文にあり，それらにはゲーデルの影響を受けていることが書かれているが，定理の発見は独立であるとも主張されている．ゲーデルは，1934 年のプリンストン高等研究所の講義録（[Davis 1965] に載った改訂版）で，真理定義不可能性定理については，タルスキの

論文を引用している．これによって，ゲーデルの定理は，タルスキの定理の改良発展であるという解釈が生まれたが，そのような事実はなさそうである．また，対角化定理に関してはカルナップ (1934) を引用し，同様に誤解の種をつくった．

真理の定義は自らの体系内でできないので，メタ言語で行うことになるというのが，タルスキ真理理論の基本的な着想である．型理論でいえば，ある型の対象についての充足関係は，その上の型の対象になる．脚注 48a は，まさにそのようなことを述べているように思えるのだが，ゲーデルはその優先権を主張していない．タルスキは，1930 年 2 月にウィーンを訪問し，ゲーデルにも会っている．タルスキはまだ学位論文を完成していなかったが，ゲーデルよりも五つ年上であり，何らかの影響をゲーデルに与えたのかもしれない（[Krajewski 2004] を参照）．p.11 で引用したワンの文章を見ると，若い二人は学問的に同程度のレベルにあったようである．

脚注 48a と関連して興味深いのは，つぎのラッセルの言葉である．

> 「論理的形式を表現しうるためには，われわれは，命題を携えて論理の外に，すなわち世界の外に出ることができなければならなぬ」(『論文（論理哲学論考)』4.12)．これこそ，私がヴィットゲンシュタインと最も意見が一致した時期にもやはり納得がいかなかった唯一の点なのである．ヴィットゲンシュタインの『論文』のために書いた序文の中で私は，どの与えられた言語においても，その言語が表現しえない事物がある，としても，そういう事物について語りうるところのより高次の言語を構成することは，常に可能である，という考えを述べた．もちろんその新たな言語の中にも，それの語りえぬ事物がやはり存在するであろうが，それは次の言語において語りうるのであり，かくして無限に進むのである．この考えは，当時は新しかったが，いまでは論理学において当然のこととして一般に認められるようになっている．この考えはヴィットゲンシュタインの神秘主義を片づけてしまうものであり，またゲーデル (Gödel) の提出したもっとも新しい難問をも片

づけるものだ，と私は考えている．[ラッセル 1960, pp.143–144]

論理学において当然になったというのは，タルスキの仕事によってであろう．しかし，ゲーデルはまさにこの階層構造が，不完全性定理の真の理由であると述べているのである．

もう一つ，これに関連すると思われるのは，テューリングの学位論文である．テューリングは，すでにテューリング機械を用いて決定問題を否定的に解決する画期的な論文を書いていた．にもかかわらず，1936 年から 1938 年まで，プリンストン大学のチャーチのもとで別の内容で学位論文を書いた（公表論文は [Davis 1965] に所収）．その研究は，算術の整合的な体系 T に対して，Con(T) など証明できない真な命題を加えて体系を拡張するという操作を超限回行い，ある種の論理式については完全な体系をつくり上げるというものである．これは，ゲーデルの構想に近い面白い研究であったが，ちょうどその頃ゲーデルは健康を害してウィーンで療養中であったため，テューリングと会うことはなかった．

以上，かなり脇道の話が長くなったが，これで第 2 節の説明を終える．

第 3 節の主目的は，決定不能命題を 1 階算術中で再構成することである．まず，原始再帰的関数が，1 階論理において足し算とかけ算のみから定義できることを示す（定理 VII）．これには，数論の中国剰余定理が用いられる．この定理の系として，P の決定不能命題が算術的に（足し算とかけ算で）構成できることを導く（定理 VIII）．さらに，どんな公理系においても，1 階論理式で，それが恒真であるとも，反例のモデルがあるとも証明できないものがある（定理 IX）．このことは，Π^0_1 文が真であることが，ある 1 階論理式の充足可能性と同値になること（定理 X）から示せる．

最後に，この論文で最も短い第 4 節では，今日第二不完全性定理と呼ばれている事実（定理 XI）（無矛盾な体系においては，自らの無矛盾性を表す命題をその内部で証明できないこと）を主張し，証明のアイデアを簡単に述べている．その証明の詳細は，このパート I の議論の一般化とともに，続編で与えると予告されている．また，彼の結果は，ヒルベルトの形式主義を否定するものではないことも付言している．

なぜパートIIが書かれなかったのか．その理由として，ゲーデル自身はファン・ハイエノールト [van Heijenoort 1967] につぎのようなコメントを与えている．「この結果が素早く受け入れられたことが，著者の計画変更の理由の一つとなった.」ワンは，またつぎのように説明する．

> もはや自分にとって新鮮味もなく，その主題の決定的前進にもならないような，面倒な細かい作業を実行に移すことをゲーデルが嫌ったからであると私は思う．[Wang 1996, p.430]

ゲーデルは，1934年の2月から5月まで，プリンストンの高等研究所で不完全性定理についての講義をしている．この講義ノートがクリーネとロッサーによって作成され，関係者の間に流布して，再帰関数論の発展を促した．1931年の論文では，今日の原始再帰的関数を再帰的関数と呼んでいたが，この講義で一般再帰的関数が導入された．ゲーデルは，その関数クラスの定義をエルブランの私信に負うものとしている．また，中国剰余定理のところでいわゆる β 関数を導入したり，ヒルベルトの第10問題との関係を議論するなど，若い数学者たちを惹き付ける話題をたくさん含んでいた．このノートは英語でつくられたこともあり，ドイツ語の原論文以上にアメリカの研究者には広く読まれたのである．しかし，一般に公開されたのは，デービス編纂の論文集 (1965) によってであった．

また，第二不完全性定理の完全な証明が書き下ろされるのは，ヒルベルト・ベルナイス [ヒルベルト・ベルナイス 1993] の第2巻 (1939) においてである．その証明は，レーブ (1955) とジェロスロー (1973) らによって改良されて，今日に至っている．詳細は，第I部をご覧いただきたい．

ゲーデルが不完全性定理を証明したあと，ヒルベルト (1932) は ω 規則なるものを導入して体系の完全化を試みた．ゲーデルは当初これをナンセンスと考えたようであるが，じつはゲンツェンの証明法は ω 規則の使用に類似しており，実際，のちにシュッテは ω 規則を用いてゲンツェンの証明を簡単化している（シュッテの議論については，文献 [田中他 1997] を参照）．また，タルスキの ω 完全性の研究や，ヘンキンの排除タイプ定理などにも，ω 規則の影響がみられる．

0.3 算術化された完全性定理と不完全性定理

本シリーズ第 2 巻の序の最後 (p.22) に，以下のように書いた．

> ゲーデルの完全性定理について重要な研究が，ヒルベルトとベルナイス [ヒルベルト・ベルナイス 1993] の第 2 巻にある．それによれば，1 階の無矛盾な理論は，算術的モデル，つまり自然数上で定義可能なモデルをもつ．彼らの議論は，ヘンキンの証明を用いれば，より簡単に見通せる．その後，モデルの複雑さについてはパトナムの分析（1957 など）を経て，現在では完全性定理を証明するには WKL_0 という体系が必要十分であるという結果に落ち着いている．

完全性定理を形式的に扱うこと，あるいはモデルがどの体系で定義できるかを調べることが重要になる理由の一つは，それが不完全性定理と，その証明の素朴な意味論的アイデア（真理定義不可能性定理や種々のパラドクスなど）の橋渡しになっているからである．やや乱暴なまとめ方をすれば，

不完全性定理＝パラドクス＋算術化された完全性定理

というスキームが成り立つ．これは，すでに 0.2 節で述べたように，ゲーデルの原論文の脚注 14 などにみられる考え方である．

完全性定理の主張は，無矛盾な 1 階理論はモデルをもつということであった．この定理を算術体系内で形式化すると，モデル上の意味論的概念が算術の述語として表現できるようになる．たとえば，「この文は偽である」といったパラドクス的主張を形式的に扱うには，真偽の概念が形式的に表現されていることが必要である．

ゲーデルの 1931 年の証明は，意味論を直接形式化して，不完全性定理を導いているわけではない．しかし，今日でいうところのタルスキの真理定義不可能性を，アイデアとして先に得ていたことはすでに述べた通りである．そ

して，真理定義不可能性定理に，算術化された完全性定理を組み合わせれば，不完全性定理を導くことは容易である．ゲーデルは，真理の述語の代わりに証明可能性の述語を使って，証明を与えたことになる．

話を進めるために，ヒルベルトとベルナイスによる「算術化された完全性定理」の内容をみておきたい．その前に，本シリーズ第2巻第I部で定義された構造 $\mathcal{M}$ の初等ダイヤグラムの定義を思い出しておく必要がある (p.65)．構造 $\mathcal{M}$ の言語 $\mathcal{L}$ に，各要素 $a \in \mathcal{M}$ を表す定数 a^* を加えた言語を $\mathcal{L}_M$ とする．簡単のため構造 $\mathcal{M}$ のままで，言語 $\mathcal{L}_M$ の構造とみなしておく．そこで，$\mathcal{L}_M$ の文で，構造 $\mathcal{M}$ で成り立つものを集めたのが，構造 $\mathcal{M}$ の初等ダイヤグラム $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_M)$ であった．すなわち，

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}_M) = \{\sigma : \mathcal{M} \models \sigma\}.$$

この集合には $\mathcal{M}$ についてのあらゆる情報が入っており，これから $\mathcal{M}$ を一意に構成できる．したがって，形式上は $\mathcal{M}$ とその初等ダイヤグラムを同一視しても問題はない．

いま，$\mathcal{M}$ や $\mathcal{L}_M$ は可算として，それぞれの要素は自然数でコードされているとする．とくに，$\mathcal{L}_M$ の論理式 σ には，ゲーデル数 $\ulcorner\sigma\urcorner$ が割り当てられている．以上の準備のもとで，構造 $\mathcal{M}$ が算術的に定義可能であるとは，つぎの条件を満たす算術の論理式 $\psi(x)$ が存在することである．$\mathcal{L}_M$ の任意の文 σ に対して，

$$\mathcal{M} \models \sigma \leftrightarrow \mathbb{N} \models \psi(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}).$$

ここで，$\mathbb{N}$ は自然数論の標準モデル，$\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}$ は算術命題 σ のゲーデル数 $\ulcorner\sigma\urcorner$ を体系内で表す記号（数項）である．

逆に，算術の論理式 $\psi(x)$ が与えられて，それがある種の条件（タルスキの真理定義条項，本シリーズ第2巻，p.65）を満たしているなら，構造 $\mathcal{M}$ を上の意味で一意に定義することができる．

「算術化された完全性定理」の主張は以下のようである．（算術的に定義可能な）矛盾な理論 T は，算術的に定義可能なモデル $\mathcal{M}$ をもつ．形式的に述べると，算術の論理式 $\mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}(x)$ が存在して，それがタルスキの真理定義条項を満たすことが PA で証明でき，さらに

$$\mathrm{PA} + \mathrm{Con}(T) \vdash \forall x(\mathrm{Pr}_T(x) \to \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}(x)).$$

ゲーデルの論法，つまりリシャールのパラドクスに類する対角論法では，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}$ を使わないで，直接 Pr_T についての議論が可能であった．しかし，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}$ を介することで，いろいろな意味論的議論が不完全性定理と関わることがわかる．

たとえば，クライゼル (1950) は，Con(ZF) を仮定したうえで，ZF のモデルを算術的に定義し，そこでラッセルのパラドクスを表現することで，PA の不完全性を導いた（[倉田 1972] を参照）．

他方，ブーロス (1989) はベリーのパラドクスを用い，チェイティン（1974 など）はコルモゴロフ計算量を用いて，一種の不完全性定理を導いている．それらも「算術化された完全性定理」によって通常の不完全性定理に直せることが，菊池ら [Kikuchi and Tanaka 1994; Kikuchi 1995] によって示されている．

パラドクスを埋め込むというやり方ではなくて，$\mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}$ の構造を分析することで，不完全性定理を導く議論も多い．クライゼルによる第二不完全性定理の証明が，[Barwise 1977] のスモリンスキーの解説にある．それと類似しているがより簡明な議論が，イェック (1994) による証明で，[田中他 1997] に解説が載っている．

表面上は不完全性定理とは関係はないが，深い繋がりをもつのは，プール－エル・クリプキの論文 (1967) である．大雑把にいえば，算術を含むどんな理論も，字面だけみるとみんなほとんど同型になっているという主張である．ややくわしくいえば，二つの理論の文の間に，再帰的な全単射が存在して，ブール演算と導出可能性を保存させることができるという内容になる．したがって，どれかが不完全であれば，すべて同程度に不完全である．この結果には，ゲーデルも大いに感心したと脚注に書かれている．

さて，算術も集合論も形式上の類似性があるなら，それらのモデルの間にもなにがしかの関係があるだろう．1963 年に公理的集合論における連続体仮説の独立性が示されると，それを決定する強い公理を探す目的から，巨大基数の研究が盛んになった．それに追随して，巨大基数の類似物を算術のモデルの中に探す研究が，1970 年頃から始まった．その中心人物がマンチェスター大学のパリスである．パリスは，テューリングの弟子ギャンディがマンチェ

スターで教えていたときの弟子の一人である．

パリスは，そのような算術の超準モデルの研究によって，PA から独立した命題を発見した．その後，ハーリントンがラムジーの定理の変形が同様な命題になることに気付いた．いわゆるパリス・ハーリントンの命題である．この発見は，周囲に大きな波紋を起こした．その様子は，第 1 巻第 I 部に書かれている．この結果の重要性を察知したバーワイズは，自ら編纂していた数理論理学のハンドブック [Barwise 1977] に最後の章をつくって，彼らの結果を載せた．そのバーワイズのコメントを引用しておこう．

> ゲーデルの不完全性定理が発表された 1931 年以来，数学者たちは 1 階ペアノ算術の不完全性について純粋に数学的な例を探し求めてきた．それは，数学的に単純でかつ内容があり，論理的概念のコード化を用いないようなものである．その最初の例が，このハンドブックがほぼ完成した 1977 年の初めに発見された．この最終章にその画期的な成果を含めることができるのは喜ばしい．これは，ハンドブックのすべての部門のアイデアを結合させるものであり，ぴったりの結びである．

パリス・ハーリントンは，再び決定不能性定理として復活させた．ただし，決定不能命題は独立命題と呼ばれることが多くなった．パリス・ハーリントンの重要性は，単に新しい独立命題の発見という事実にあるのではない．バーワイズが書いているように，ロジックのさまざまな分野のアイデアを集結した証明手法の画期性こそが重要である．その後も，より大きな体系に対する算術的独立命題がいろいろ発見されているが，パリスとハーリントンが開発した技法をアイデアの一部に使っているものが多い（本巻第 II 部を参照）．また，パリス・ハーリントンの命題に対する独立性の別証明もいろいろ研究されている．とくに有名なのは，急増加関数を用いたケトーネン・ソロベイ (1981) の証明（[田中他 1997] 参照）と超ベキを用いたコーチェン・クリプキ (1982) の証明であろう．他にも，パリス・ハーリントンのバリエーションに対する多くの議論がある（例：パトナムの『超準モデルとゲーデルの定理のクリプキの証明』(2000) など）．

付録 1
ヘラクレスとヒドラの戦い

パリス・ハーリントンの定理 (1977) 以後，1 階ペアノ算術やそれ以外のさまざまな体系に対して，人工的でなく，数学的に自然な内容をもつ独立命題（証明できない正しい命題）が発見されている．

パリス・ハーリントンの定理については，本巻の第 II 部で解説されるが，ここではそれよりも内容がイメージしやすい「ヘラクレスとヒドラの戦い」を紹介する．ギリシャ神話を素材にしたこの命題は，ヘラクレスはどんな戦略をとってもヒドラを退治できるのだが，その事実がペアノ算術 PA では証明できないというものである．原典の論文 [Kirby-Paris 1982] では，もう一つ別の独立命題として，グッドスタイン列と呼ばれる数列に関する命題も取り上げているがここでは省略する．

さて，以下では，ヒドラを有限の木と考える．木は半順序構造で，ルート（根）と呼ばれる最小元を唯一つ，リーフ（葉）と呼ばれる極大元をいくつかもっている．木の基本性質として，ルートと各リーフを結ぶ道は一つしかない．リーフとそれに隣接する辺を含めて，ヒドラのヘッド（首）と呼ぶことにする．たとえば，図 1 において，ヒドラは六つのヘッドをもっている．

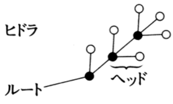


図 1

この戦いでは，ヘラクレスがヒドラのヘッドを一つずつ切り落としていき，ルートだけにしてしまえば，彼の勝ちというものである．しかし，ヒドラはつぎのルールにしたがって成長するものとする．

ルール　切り落とされたヘッドの付け根がルートでない限り，その付け根から先の残っている部分が，それまでの攻撃の回数だけ増える．

このルールがいかに適用されるかは，図 2 の例をみていただければ明白であろう．

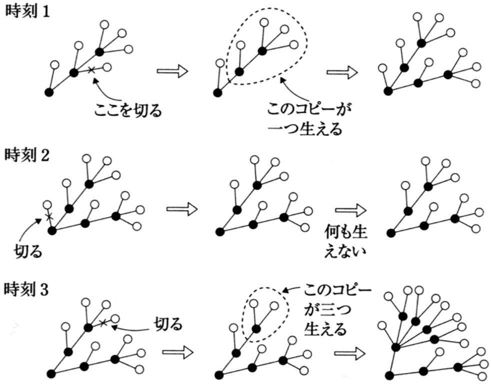


図 2

さて，このように成長するヒドラをヘラクレスは退治できるだろうか？　素朴な立場（あるいは集合論）で考えれば，答えは YES であり，しかもヘラクレスがどんなでたらめな攻撃をしてもいつか（有限時間内に）ヒドラはルートだけになる．それをまず証明しよう．

定理 0.1　ヘラクレスがどのような戦略をとっても有限時間内にヒドラは退治される．

証明　まず，つぎの観察をしておこう．ヘラクレスの各攻撃のあと，ヒドラは横に広がっていくだけで，けっして上には成長しない．また，横に広がる

場合でも，必ず上のほうの枝分かれが減っている．全体として，枝分かれの位置がルートに近づくような動きになっており，最終的には無数のヘッドが直接ルートからはえている状態になり，そうなるといくら切り落としてももうヘッドはふえないので，必ず退治されることになる．

これを少し形式的に説明するには，ヒドラの各状態に順序数 $(< \epsilon_0)$ を割り当てて，どんな攻撃のあとでも順序数が減少することをみればよい．つまり，順序数の整列性を用いて，無限の攻撃列がないことが示される．

まず，ヒドラのヘッド（リーフ）に順序数 0 を割り当てる．節点 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ がそれぞれ順序数 $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$ をもつとき，それらの節点を子にもつ節点には順序数 $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ を割り当てる．このルールによって，各節点にはちょうど一つの順序数 $(< \epsilon_0)$ が割り当てられる．そして，ルートに割り当てられた順序数をそのヒドラの順序数と定義する．図 3 を参照．

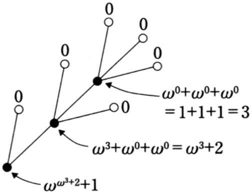


図 3

ヘラクレスの攻撃によってヒドラの順序数がどう変化するか，図 2 の例を使って考えてみよう．時刻 3 の変化を図 4 に示す．各攻撃のあとにヒドラが

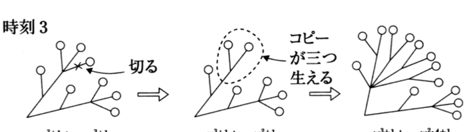


図 4

成長しても，その順序数は攻撃前より小さい．なぜなら，任意の自然数 n について，$\omega^\alpha \cdot n < \omega^{\alpha+1}$ が成り立つからである．そこで，順序数の整列性を用いれば，攻撃は必ず有限で終了する． ■

つぎに，独立性証明のアイデアを述べる．まず，上の定理を 1 階算術の言葉で表現しておく必要がある．ヒドラは有限の木であるから，自然数でコードするのは簡単である．問題なのは「どのような戦略」をとってもというところであるが，最も効率の悪い，つまり攻撃回数が最大になる戦略 MAX が容易に定義できるので，それについての主張としておけばよい．

各可算順序数 α について，自然数から自然数への関数 f_α を以下のように定義する．

$f_0(n) = n+1,$

$$f_{\alpha+1}(n) = \overbrace{f_\alpha f_\alpha \cdots f_\alpha}^{n+1\text{ 個}}(n)$$

$f_\alpha(n) = f_{\alpha_n}(n)$（ただし，$\alpha$ は，順序数の増加列 $\{\alpha_n\}$ の極限）

これらの関数は急増加関数と呼ばれ，α が大きくなると，f_α の増加度は急速に大きくなる．おおよそ，f_1 は $2n$，f_2 は 2^n，f_3 は $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}\right\}n+1\text{ 個}$ の増加度であり，f_ω はアッケルマン関数，そして f_{ϵ_0} になると，もはやペアノ算術では扱えない関数となる．もう少し正確に言い直すと，ペアノ算術で $\forall x \exists y \varphi(x,y)$（$\varphi(x,y)$ は Σ^0_1 論理式）が証明できる場合には，ある順序数 $\alpha < \epsilon_0$ が存在して，$\forall x \exists y < f_\alpha(x) \varphi(x,y)$ が真となる．詳細は，[田中他 1997] を参照．

さて，ヘッドを一つしかもたない高さ x のヒドラに対して，最悪戦略 MAX を用いたときの終了までの攻撃数を $y = g(x)$ とすると，$g(x)$ はほぼ f_{ϵ_0} の増加度をもつことが証明できる．したがって，どんな x についてもそのような y が存在するという命題は，ペアノ算術では証明できないのである．

定理 0.2　ヘラクレスがどのような戦略をとっても，ヒドラが退治されるという事実は，ペアノ算術で証明できない．

逆に，必ずヒドラが退治されるという命題を仮定すれば，ペアノ算術の無矛盾性が導ける．これについて，簡単にみておこう．

ゲンツェンは，超限帰納法を使って，ペアノ算術の無矛盾性を証明した．その証明法は，算術における「証明」をより安全な（カットの少ない）「証明」に置き換えていくものである．そうすると，各「証明」については，必ず有限ステップでカットなしの「証明」に変換される．しかし，任意に与えられた「証明」のコードから，その「証明」のカット除去に必要なステップ数を求める関数は f_{ϵ_0} の増加度になる．したがって，ヒドラがつねに退治できるなら，f_{ϵ_0} が定義できるので，「証明」のカットはつねに消去できることが示せ，ペアノ算術の無矛盾性が保証されるというわけである．このような議論については，現在も多数の論文が書かれているので，興味ある方は，まず [田中他 1997] 辺りから読んでいただくのがいいと思う．

付録 2
ヒルベルトの第 10 問題

「n 個の未知数を含む整数係数の多項式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対し，方程式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$（ディオファントス方程式または不定方程式と呼ぶ）が整数解をもつか否かを有限的に判定する方法をみつけよ」というのがヒルベルトの第 10 問題である．

ディオファントスは 3 世紀頃の人らしいが，17 世紀になって彼の本『アリスメティカ』に熱中した男がフェルマーである．とくに $x^n + y^n = z^n$ $(n \geq 3)$ という形の方程式が正の整数解をもたないと書き込みを残したことが，その後 350 年にわたって多くの数学者たちを悩ませることになった．フェルマーの予想は前世紀末にワイルスによって正しいことが証明されたが，しかしこのように解の有無がわかるディオファントス方程式はむしろ例外的である．一般に 3 変数以上のディオファントス方程式を解く有力な方法はまったくみつかっておらず，たとえば，$x^3 + y^3 + z^3 - 3 = 0$ が $(1, 1, 1)$, $(4, 4, -5)$ とその並び換え以外の整数解をもつかどうかはわかっていない．

解の存在を調べるにあたって，解の範囲を自然数に制限することは，第 10 問題において本質的ではない．なぜなら，任意の自然数は四つの平方数の和で表されるというラグランジュの定理を使えば，ディオファントス方程式 $P(x, \cdots, z) = 0$ を自然数の範囲で解く問題は，ディオファントス方程式 $P(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \cdots, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) = 0$ を整数の範囲で解く問題に直せるからである．このことは，ゲーデルの 1934 年の講義ノートにも書かれている．しかし，ゲーデルがそこで導いた結果は，$P(x, \cdots, z) = 0$ の

前に，存在記号 ∃ だけでなく，全称記号 ∀ も交ぜて加えた式の真偽は有限的に判定できないというものであった．

その後多くの人の努力があって，「指数関数を含んだディオファントス方程式の自然数解の存在は有限的に判定できない」というのが 1960 年前後までにロビンソン，デービス，パトナムが得た結果であった．3 人はさらに，指数関数を含んだディオファントス方程式を普通のディオファントス方程式に還元する方法を構想していたが，その最後の詰めを 1970 年に完成したのがロシア人のマチャセビッチだった．

簡単に述べると，第 10 問題の解法は，つぎの二つのパートからなる．まず，自然数の集合 A に対し，その要素を並べ上げるアルゴリズムがある（そのような A を RE 集合という）ならば，整数係数の多項式 P が存在して，$a \in A \Leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n P(a, x_1, \cdots, x_n) = 0$ と表せるというのが第 1 パートで，前述の貢献者 4 名の頭文字をとって今日 MRDP 定理と呼ばれる．第 2 パートは，集合 A が RE でも，各自然数が A に属するか否かを判定するアルゴリズムがない（つまり，補集合は RE でない）場合があるというもので，これは基本的にゲーデルの仕事から導かれるものである．そして，第 2 パートの集合 A に対し，第 1 パートの多項式 P を考えれば，各自然数 a について $P(a, x_1, \cdots, x_n) = 0$ の可解性を判定するアルゴリズムはないことになる．よって，すべてのディオファントス方程式の可解性を判定するアルゴリズムもない．

第 10 問題は数論の問題群（第 7–11 問題）の中で提起されたが，その解決には数学基礎論の成熟が必要だったのである．逆に，数学基礎論や計算論の発展の原動力として，第 10 問題やそれに込められたヒルベルトの思想が果たした役割も大きかったといえよう[1)]．

1) 付録 2 の詳細は [杉浦 1997] を参照．

参考文献

[Barwise 1977] Barwise, J., *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland Publishing (1977). 1000 ページを越える，章ごとに読める辞典．バーワイズ自身による 1 階論理入門，スモリンスキーによる不完全性定理，パリス・ハーリントンの独立命題などの章が，とくに参考になる．

[Benacerraf and Putnam 1983] Benacerraf, P. and Putnam, H. (ed.), *Philsophy of Mathematics, Selected Readings*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press (1983). 1930 年のケーニヒスベルグの会議での三つの立場の講演記録の他，数理哲学系の重要論文を多数収録．

[ブーブレス 2003] ブーブレス，J., 宮代康丈訳『アナロジーの罠：フランス現代思想批判』新書館 (2003). 原著：Bouveresse, J., *Prodiges et vertiges de l'analogie*, Raisons d'agir (1999).『知の欺瞞』で指摘された「ゲーデルの定理」の濫用について，フランスの哲学者がさらに徹底した分析を行う．

[Bulloff *et al.* 1969] Bulloff, J. J., Holyoke, T. C. and Hahn, S. W. (ed.), *Foundations of Mathematics, Symposium Papers Commemorating the Sixtieth Birthday of Kurt Gödel*, Springer (1969). ゲーデル 60 歳記念シンポジウムの論文集．

[Davis 1965] Davis, M., *The Undecidable: basic papers on undecidable propositions, unsolvable problems, and computable functions*, Hewlett, Raven Press (1965). ゲーデル，テューリング，チャーチらの重要論文を収録．とくに，ゲーデルの 1934 年の講義録が収められている．ドーバー版 (2004) もある．

[ドーソン 2006] ドーソン，J. W., 村上祐子・塩谷賢訳『ロジカル・ディレンマ：ゲーデルの生涯と不完全性定理』新曜社 (2006). ゲーデルとの個人的交流をまとめたワンの 3 部作とは対照的に，膨大な客観資料や聞き取り調査による緻密な伝記．

[Ewald 1996] Ewald, W. B., *From Kant to Hilbert*, Oxford Univ. Press (1996). [van Heijenoort 1967] を補う，数学基礎論の原論文（の英訳）の集大成．

[Feferman *et al.* 1986–2003] Feferman, S., *et al.* (eds)., *Kurt Gödel Collected Works, I–V*, Oxford Univ. Press, vol.I (1986), II (90), III (95), IV, V (2003). ゲーデルの原論文，未公開ノート，手紙などを，英訳をつけて解説．

[ジャキント 2007] ジャキント，M., 田中一之監訳『確かさを求めて：数学の基礎についての哲学論考』培風館 (2007). 原著 Giaquinto, M., *The Search for Certainty; A philosophical account of foundations of Mathematics*, Oxford Univ. Press (2002). ラッセルの論理主義とヒルベルトのプログラムに焦点をあてて，数学基礎論の大きな流れを展望する．

[Gödel 1931] Gödel, K., "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systtem I", *Monatshefte für Mathematik und Physik*, **38** (1931), 173–198. 不完全性定理の原論文．

[Goldfarb 2005] Goldfarb, W., "On Gödel's way in : the influence of Rudolf Calnap", *Bulletin of Symbolic Logic*, **11** (2005), 185–193. 初期のゲーデルの仕事へのカルナップの影響を分析する．

[Grattan-Guinness 2000] Grattan-Guinness, I., *The Search for Mathematical Roots 1870–1940*, Princeton Univ. Press (2000). マイナー情報が満載された歴史通の本. ヒルベルトの仕事などメジャーな事柄はあまり書かれていない.

[林・八杉 2006] 林晋・八杉満利子『不完全性定理』岩波文庫, 岩波書店 (2006). ヒルベルトの公理論の解説書として貴重.

[Henkin 1962] Henkin, L., "Are Logic and Mathematics Identical?: An old thesis of Russell's is reexamined in the light of subsequent developments in mathematical logic", *Science*, **138**, 788 (1962), 788–794. 反・論理主義を掲げた論文. いまでも抵抗なく読める.

[ヒルベルト 1970] ヒルベルト, D., 寺阪英孝・大西正男訳『幾何学の基礎/エルランゲン・プログラム』(1970). ヒルベルトの公理論の原点となる名著. 付録に多数の講演録を所収.

[ヒルベルト 2005] ヒルベルト, D., 中村幸四郎訳『幾何学基礎論』ちくま学芸文庫, 筑摩書房 (2005). 原著：Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie Über den Zahlbegriff Axiomatisches Denken*, Teubner (1930).

[ヒルベルト・アッケルマン 1954] ヒルベルト・アッケルマン, 伊藤誠訳『記号論理学の基礎』大阪教育図書 (1954). 原著 Hilbert, D. and Ackermann, W., *Grundzüge der theoretischen Logik, 3. Auflage*, Springer, Berlin (1972): 1st ed. (1928). 第 2 版 (1938) の英訳 *Principles of Mathematical Logic*, AMS Chelsea (1950) や第 6 版 (1972) の和訳 (1974) もある. 1928 年の初版は, 現代論理学の出発点となる金字塔. 1 階論理の完全性がここで問題提起された.

[ヒルベルト・ベルナイス 1993] ヒルベルト・ベルナイス, 吉田夏彦・渕野昌抄訳『数学の基礎』(シュプリンガー数学クラシックス) シュプリンガー・フェアラーク東京 (1993). 原著:Hilbert, D. and Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik I, II*, 2nd ed., Springer (1934/1968, 1939/1970). 「ザ・数学基礎論」というべき古典. ゲーデルの完全性定理, 不完全性定理についての詳細な分析を含む.

[廣瀬・横田 1985] 廣瀬健・横田一正『ゲーデルの世界：完全性定理と不完全性定理』海鳴社 (1985). ゲーデルの二つの論文の全訳が付けられている. これらの定理や背景の説明もコンパクトでわかりやすい.

[Kikuchi and Tanaka 1994] Kikuchi, M. and Tanaka K., "On formalization of model-theoretic proofs of Gödel's completeness theorems", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **35** (1994), 403–412. 算術化された完全性定理を逆数学的に見直すことで第二不完全性定理まで導く.

[Kikuchi 1995] Kikuchi, M., "On Gödel's Incompleteness Theorems", 東北大学博士論文 (1995).

[Kirby-Paris 1982] Kirby-Paris, "Accessible independence results for Peano arithmetic", *Bull. of London Math. Soc.*, **14** (1982), 285–293.

[Krajewski 2004] Krajewski, S., "Gödel on Tarski", *APAL*, **127** (2004), 303–323. ゲーデルがタルスキのどの仕事に興味をもち, またもたなかったかをくわしく分析.

[倉田 1972] 倉田令二朗『数学論序説』ダイヤモンド社 (1972).

[前原 1997] 前原昭二『数学基礎論入門』朝倉書店 (1997).

[Mancosu 1998] Mancosu, P., *From Brouwer to Hilbert*, Oxford (1998). ブラウワー, ヒルベルト, ベルナイスらの論争的論文や講演録の英訳を収録し, 解説している.

[Mancosu 1999] Mancosu, P., "Between Russell and Hilbert: Behmann on the foundations of mathematics", *The Bulletin of Symbolic Logic*, **5** (1999), 303–330.

[ナーゲル・ニューマン 1985] ナーゲル, E.,・ニューマン, J.R., はやしはじめ訳『数学から超数学へ：ゲーデルの証明』白揚社 (1985). 原著：Nagel, E. and Newman, J. T., *Gödel's Proof*, New York Univ. Press (1964).

[ラッセル 1960] ラッセル, B., 野田又夫訳『私の哲学の発展』みすず書房 (1960). 原著：Russell, B., *My Philosophical Development* (1959).

[ソーカル・ブリクモン 2000] ソーカル, A. D.・ブリクモン, J., 田崎晴明・大野克嗣・堀茂樹訳『「知」の欺瞞：ポストモダン思想における科学の濫用』岩波書店 (2000). 原著：Sokal, A.D. and Bricmont, J., *Impostures intellectuelles*, Editions Odile Jacob (1997). 「ソーカル事件」と呼ばれる騒動のもとになった数理物理学者ソーカルのパロディー論文を収録. ソーカルがこの論文を書くために収集した大量の資料を使って, 事件の背景にある問題点をベルギーの物理学者ブリクモンと共に分析する.

[杉浦 1997] 杉浦光夫編,『ヒルベルト 23 の問題』日本評論社 (1997).

[田中他 1997] 田中一之・鹿島亮・角田法也・菊地誠『数学基礎論講義：不完全性定理とその発展』日本評論社 (1997).

[van Heijenoort 1967] van Heijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard Univ. Press (1967). スコーレム, ヒルベルト, ゲーデル, エルブランらの主要論文の英訳を収録.

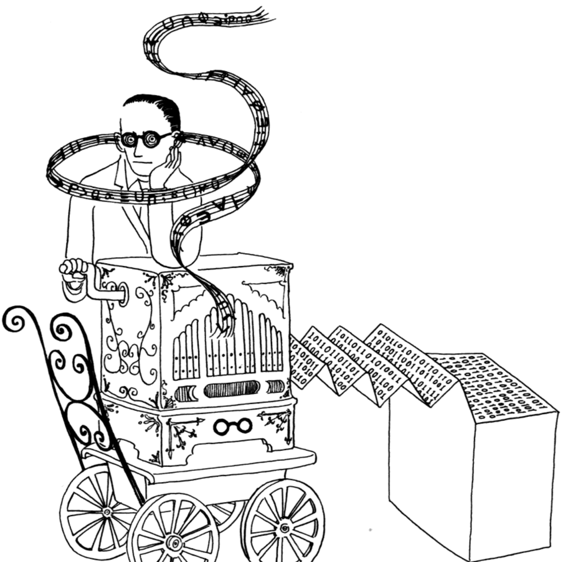
[ワン 1995] ハオ・ワン, 土屋俊・戸田山和久訳『ゲーデル再考：人と哲学』産業図書 (1995). 原著：Wang, H., *Reflections on Kurt Gödel*, Cambridge, Mass. (1987)：晩年までゲーデルと交流をもっていたハオ・ワンによるゲーデル伝. 前作 *From Mathematics to Philosophy* (1974) のゲーデルについての記述を大幅に拡充して, 整理.

[Wang 1996] Wang, H., *A Logical Journey: from Gödel to Philosophy*, MIT Press (1996). 上記の本の続編であり, 1995 年に亡くなった王浩の最後の労作.

I

第一不完全性定理と第二不完全性定理

鹿島 亮



1931年に出版されたゲーデルの論文「『プリンキピア・マテマティカ』やその関連体系での形式的に決定不可能な命題について，I」において得られた結果は，その後ゲーデルや他の研究者（ロッサー，ヒルベルト，ベルナイス，レーブなど），そして多くの数理論理学の教科書執筆者により改良，洗練され，現在ではつぎの形で提示されることが多い．

第一不完全性定理
算術の公理系をどのように定めても，それが無矛盾で「ペアノの自然数の公理」などの基本的な公理を含んでいるならば，そこで証明も反証もできない命題が必ず存在する．

第二不完全性定理
算術の公理系をどのように定めても，それが無矛盾で「ペアノの自然数の公理」などの基本的な公理を含んでいるならば，そこで自らの無矛盾性を証明することはできない．

本書第I部の目的は，これらの不完全性定理を現代的に整理された方法によって正確にかつわかりやすく提示，証明することである．

本文の構成はつぎのようになっている．最初の二つの章では，不完全性定理に必要な基礎的な概念を用意する．具体的には，第1章では関数や述語の計算可能性について，第2章ではペアノ算術の公理系について，それぞれ説明する．そして第3章で第一不完全性定理を，第4章で第二不完全性定理を示し，最後の第5章では第二不完全性定理の証明の詳細に触れる．

全体を通して随所（各章の初めなど）に平易な説明を入れ，予備知識なしで読めることを目指した．しかし，論理式の同値変形や公理系内での証明，公理系に対するメタな議論，といった述語論理の基本的な扱いは予備知識としてある程度必要である．これらは数理論理学の基本であり多くの教科書で説明されているので，ぜひそちらをご参照いただきたい．

不完全性定理は，その結果だけが都合良く解釈されて「人間の知の限界」などといったキーワードとともに引用されることが時折ある．しかし，そんな引用だけからは不完全性定理の意義をすべて汲み取ることはできないだろう．数や図形といった豊かな研究対象がもつ未知の性質を数学技術を駆使して解

明しようとするのが数学の研究である，というのと同じ意味で，数学の公理系という豊かな研究対象がもつ未知の性質を数学技術を駆使して解明しようとする数学の研究があり，そんな研究の出発点になっているのが不完全性定理なのである．出発点ということはそれが画期的なアイデアや技術をもっているということで，そんなアイデアや技術の面白さにこそ不完全性定理の本当に重要な意義があるのだと思う．

本稿が不完全性定理への理解を広める一助となれば幸いである．

第1章
計算論

計算論とは関数や述語の計算可能性とその周辺に関する研究である．計算論の出発点は「計算可能性のさまざまな定義の同値性」「計算不可能関数の存在，とくに具体的に興味深い意味のある関数の計算不可能性」などであり，そこからさらに，関数や述語を計算可能性に関わるさまざまな尺度で細かく分類してその階層構造の性質を調べる，という研究が深く発展している．不完全性定理はそうした計算論と密接な関係がある．不完全性定理の主張を正確に述べるためには計算可能性の概念が必要であるし，そもそもゲーデルが不完全性定理において導入した重要な概念や結果が，計算論の出発点の一つになっているのである．そこでこの章では，不完全性定理のために必要な計算論の基礎事項を，現代のコンピュータの視点も交えて大まかに説明する．計算論の詳細を知りたい読者は，良い教科書がたくさんあるのでぜひそちらをご覧いただきたい．

1.1　計算可能性

自然数（$0,1,2,\ldots$）上の関数の計算可能性を考えたい．たとえば

$$\mathrm{double}(x) = 2 \cdot x$$

なる double は「2 倍する」という 1 変数関数であり，

$$\mathrm{times}(x, y) = x \cdot y$$

なる times はかけ算をする 2 変数関数である．これらが計算可能であることは素朴に認められるだろう．また

$$\mathrm{lcm}(x, y) = 「x \text{ と } y \text{ との最小公倍数}」$$

といった関数も計算可能であろう（lcm は least common multiple の頭文字）．それでは計算不可能な関数というのはあるのだろうか．あるとしたらどのような関数なのだろうか．

この疑問に答えるためには関数とその計算可能性の定義が必要である．まず関数 (function) とは「入力と出力との対応関係」であると定義する．たとえば double は

$$0 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto 2, \quad 2 \mapsto 4, \cdots$$

という対応関係であり，これは図 1.1 の表のように書くことができる．また 2 変数関数 times は図 1.2 の表で書くことができる．これらは紙面の都合上一部分しか載せていないが，本当は無限に広がる表である．関数というのは

入力	0	1	2	3	⋯
出力	0	2	4	6	⋯

図 1.1　double の表

入力＼入力	0	1	2	3	⋯
0	0	0	0	0	⋯
1	0	1	2	3	⋯
2	0	2	4	6	⋯
3	0	3	6	9	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

図 1.2　times の表

このような表によって過不足なく一意に表現される．たとえば multi と呼ばれる表が存在して，それが図 1.3 のように times の表と無限に広がるすべて

入力＼入力	0	1	2	3	⋯
0	0	0	0	0	⋯
1	0	1	2	3	⋯
2	0	2	4	6	⋯
3	0	3	6	9	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

図 1.3　multi の表

の部分で一致していたら，「times と multi は同じ関数である」といえるだろう．そこで以後「関数」と「表」とを同一視する．

それでは計算可能とはどういうことだろうか．たとえばかけ算 times は計算可能といえるが，これは「九九」という有限の記憶と「2 桁以上のかけ算の一般的な方法」を知っていることによって，どんな数のかけ算もできるからである．このことを一般化して，計算可能な表，つまり計算可能関数 (computable function) をつぎで定義する．

> 有限的に記述される手順（アルゴリズム）が存在して，その手順に従えば表のどんな欄の値も機械的に有限時間内に求めることができる関数のことを，計算可能関数と呼ぶ．

この「有限的に記述される手順」には厳密な定義があるのだが，その詳細は省略する．現代的には，現実のプログラミング言語（Basic，C，Fortran，Java，Pascal，アセンブリ言語などなんでもよい）でプログラムが書ける手順だと思えばよい．つまり「計算可能」とは「プログラムが存在する」ということである（1930 年代にゲーデルやその他の研究者によって与えられた計算可能性の定義が，その後の現実のコンピュータとプログラミング言語の理論的な先駆けになっているのである）．たとえば図 1.4 の Pascal プログラムを実行

```
program LCM(input, output);
var x, y, a: integer;
begin
  readln(x, y);
  if ((x <= 0) or (y <= 0)) then
    writeln(0)
  else begin
    a := 1;
    while (((a mod x) > 0) or ((a mod y) > 0)) do
      a := a + 1;
    writeln(a)
  end
end.
```

図 1.4　lcm のプログラム

して自然数を二つ入力すると，それらの最小公倍数が計算されて出力される（Pascal 言語を知らない読者はこのプログラムを解読する必要はない．単に，二つの正整数が与えられると「1 はそれらの公倍数か？」「2 はそれらの公倍数か？」「3 はそれらの公倍数か？」$\cdots$ と順番に探していく，という手順が書いてあるだけである）．このプログラムの実行によって lcm の表のどんな欄にも正しい値を埋めることができるので，関数 lcm は計算可能である．なお，現実のコンピュータでは一つの変数に格納できる値には上限があるのでそれを超えた値は扱えないが，ここではそのような上限がない状況で考える．

以上が関数とその計算可能性の定義である．これを用いれば，関数の計算不可能性も厳密に示すことができるようになる（計算不可能な関数の具体例は 1.4 節であげる）．

述語 (predicate) とは与えられた値に対して「成り立つ／成り立たない」を対応させるものであり，たとえば

$$\mathrm{odd}(x) \iff \text{「}x\text{ は奇数である」}$$
$$\mathrm{less}(x,y) \iff \text{「}x<y\text{」}$$

のようなものである（odd は 1 変数述語，less は 2 変数述語である）．k 変数述語 $P(\vec{x})$ に対して，

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & (P(\vec{x}) \text{ が成り立つとき}) \\ 0 & (P(\vec{x}) \text{ が成り立たないとき}) \end{cases}$$

となる k 変数関数 f を，述語 P の特性関数 (characteristic function) と呼ぶ（ただし $\vec{x}$ は $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を表す）．そして特性関数が計算可能である述語のことを計算可能述語 (computable predicate) と呼ぶ．

コンピュータプログラムによる見方をするならば，つぎのようにもいえる．

> 述語 P が計算可能であるとは，P を判別するプログラムが存在することと同値である．ただしプログラム X が述語 P を判別するとは，任意の値 $\vec{n}$ に対してつぎが成り立つことである．
>
> > プログラム X を入力値 $\vec{n}$ で実行すると有限時間で止まって，$P(\vec{n})$ が成り立つか否かの答（YES または NO）を正しく出力する．

なお，ここで「有限時間で止まって」とあえていっているのは，プログラムの中には永久に動き続けるもの（いわゆる「無限ループ」を含むプログラム）も存在するからである（後の 1.4 節でこれに関連した説明を行う）．

1.2 再帰的関数

計算可能関数と同値な概念の一つに再帰的関数（recursive function, 帰納的関数ともいう）と呼ばれるものがある．これはつぎの (1)–(4) で定義される．

(1) ゼロ関数 $\mathrm{Z}(\ ) = 0$，後者関数 $\mathrm{S}(x) = x + 1$，および $1 \leq i \leq k$ なる各 i, k に対する射影関数 $\mathrm{P}_i^k(x_1, \cdots, x_k) = x_i$ は再帰的関数である（ゼロ関数は 0 変数の関数，つまり定数 0 である）．

(2) m 個の k 変数関数 $g_1, \ldots, g_m$ と m 変数関数 h がすべて再帰的関数のとき，

$$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \cdots, g_m(\vec{x}))$$

で定義される k 変数関数 f は再帰的関数である．この f は，$g_1, \ldots, g_m$ と h から関数合成で得られるという．

(3) k 変数関数 g と $(k+2)$ 変数関数 h とが再帰的関数のとき，

$$f(\vec{x}, y) = \begin{cases} g(\vec{x}) & (y = 0 \text{ のとき}) \\ h(\vec{x}, y-1, f(\vec{x}, y-1)) & (y > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される k 変数関数 f は再帰的関数である．この f は，g と h から原始再帰 (primitive recursion) で得られるという．

(4) $(k+1)$ 変数関数 g が再帰的関数で，条件「どんな $\vec{x}$ に対しても適当な y をとれば $g(\vec{x}, y) = 0$ になる」を満たすならば，

$$f(\vec{x}) = \mu y \Big(g(\vec{x}, y) = 0 \Big)$$

で定義される k 変数関数 f は再帰的関数である．ただし $\mu y \Big(g(\vec{x}, y) = 0 \Big)$ は「$g(\vec{x}, y) = 0$ を満たす最小の y」を表す．この f は，g から最小化で得られるという．

つまり再帰的関数とは，ゼロ関数，後者関数，射影関数などから，関数合成，原始再帰，最小化などを組み合わせて構成される関数のことである．

特性関数が再帰的である述語のことを再帰的述語 (recursive predicate) と呼ぶ．

証明は与えないが，つぎの定理がここで最も基本的で重要なものである．

定理 1.1 「再帰的」と「計算可能」は同等である．すなわち，関数 f が再帰的であることと f を計算するプログラムが存在することは同値であり，また，述語 P が再帰的であることと P を判別するプログラムが存在することは同値である．

1.3　原始再帰的関数

計算可能関数（定理 1.1 によればこれは再帰的関数に等しい）全体のクラスよりも小さいクラスで重要なのが原始再帰的関数 (primitive recursive function) のクラスである．原始再帰的関数は再帰的関数の定義から最小化を取り除いたつぎの (1)–(3) で与えられる．

(1) ゼロ関数，後者関数，射影関数はすべて原始再帰的関数である．

(2) 原始再帰的関数から関数合成で得られる関数はまた原始再帰的関数である．

(3) 原始再帰的関数から原始再帰で得られる関数はまた原始再帰的関数である．

特性関数が原始再帰的である述語のことを原始再帰的述語 (primitive recursive predicate) と呼ぶ．

最小化が使えないので，計算可能ではあるが原始再帰的にはならない関数が存在する．しかし，通常みかける関数のほとんどは原始再帰的である．

コンピュータプログラムによる見方をするならば，計算可能関数（再帰的関数）と原始再帰的関数とはつぎのように対比させることができる．

計算可能関数：(任意のプログラミング言語でよいのだがとくに)「if」「for」「while」だけを制御機能として使用できる Pascal 言語で計算プログラムが書ける関数．

原始再帰的関数：上記の Pascal 言語から「while」を取り除いた言語，つまり「if」「for」だけを制御機能として使用できる Pascal 言語で計算プログラムが書ける関数．

直感的には，原始再帰

$$f(\vec{x},y)=\begin{cases} g(\vec{x}) & (y=0\text{ のとき}) \\ h(\vec{x},y-1,f(\vec{x},y-1)) & (y>0\text{ のとき}) \end{cases}$$

は「g を初期値として h を y 回くり返す計算」であり，最小化

$$f(\vec{x})=\mu y\Big(g(\vec{x},y)=0\Big)$$

は「$g(\vec{x},y)$ が 0 になるまで $y=0,1,2,\ldots$ と探していく計算」(いつまで探せばよいかはあらかじめ予測できない) である．そして，Pascal 言語における「for」と「while」はともにくり返し計算をする機能であるが，前者が「くり返し回数があらかじめわかっているような計算」しかできないのに対して，後者は「くり返し回数が予測できない計算」も可能である．このような考察から，

原始再帰	···	for
最小化	···	while

という対応が付き，「while を取り除く」ということが再帰的関数のクラスを原始再帰的関数のクラスへ狭めることに対応していることがわかる (なお，図 1.4 のプログラムは，while を使わずに **a** を動かす範囲を **1** から **x*y** に限定した for を使って同等な計算をすることが可能なので，lcm は原始再帰的である)．

1.4　RE 集合

この節では，「計算可能」よりも広い概念の中でとくに重要な，RE (recursively enumerable) と呼ばれるクラスを定義する．

これ以後一般に「述語 P を成り立たせる値の集合」と「述語 P」とを同一視する．つまり，たとえば 1.1 節にあげた述語 odd を「奇数全体の集合」と同一視し，述語 less を集合 $\{(m,n)\mid m<n\}$ と同一視する．

定理 1.2 k 変数述語（すなわち自然数の k 個組の集合）P に関する以下の4条件は同値である.

(1) ある $(k+1)$ 変数原始再帰的述語 Q が存在して，任意の $\vec{x}$ に対してつぎが成り立つ.

$$P(\vec{x}) \iff \exists y Q(\vec{x}, y)$$

（すなわち，$P(\vec{x})$ が真になるための必要十分条件は，$Q(\vec{x}, y)$ を真にする y が存在することである.）

(2) ある $(k+1)$ 変数計算可能述語 R が存在して，任意の $\vec{x}$ に対してつぎが成り立つ.

$$P(\vec{x}) \iff \exists y R(\vec{x}, y)$$

(3) P を枚挙するプログラムが存在する．ただしプログラム X が P を枚挙するとは，X を実行すると自然数の k 個組を随時出力しながら（全然出力しないプログラムもある）永久に動き続け，出力された値全体の集合が P に一致する，ということである.

(4) P を半判別するプログラムが存在する．ただしプログラム Y が P を半判別するとは，任意の値 $\vec{n}$ に対してつぎが成り立つことである.

プログラム Y を入力値 $\vec{n}$ で実行すると，$P(\vec{n})$ が成り立つ場合は有限時間で止まって「YES」と出力し，$P(\vec{n})$ が成り立たない場合は永久に止まらない.

この定理の証明は他書に譲る．上記の条件 (1)–(4) のいずれかが成り立つ（したがってすべてが成り立つ）P のことを RE 述語，RE 集合であると定義する．なお，recursively enumerable という語は「再帰的関数によって枚挙可能」という意味であり，直接的には条件 (3) を表していると考えてよい.

「述語 P が計算可能ならば P は RE」が成り立つことは簡単にわかるが，逆は一般に成り立たない．そのような例，すなわち RE であるが計算不可能な述語の具体例をあげておく．コンピュータプログラムや論理式は有限の文

字列なので，それらを適当にコード化することによって自然数に対応させることができる（論理式のコード化については 3.2 節でくわしく定義する）．そして，それを用いたつぎの 2 変数述語 Halt や 1 変数述語 Valid が，RE かつ計算不可能なものの代表例である．

Halt(m, n) $\Longleftrightarrow$ 「m は入力を一つとって動くプログラムのコードであり，そのプログラムを入力値 n で実行すると，有限時間で止まる」

Valid(n) $\Longleftrightarrow$ 「n は 1 階述語論理の恒真な論理式のコードである」

(Valid については 3.8 節でも説明する.)

1.5 β 関数によるコード化

自然数の列 $a_1, \ldots, a_k$ に対して，$2^{a_1+1} \cdot 3^{a_2+1} \cdot 5^{a_3+1} \cdots p_k^{a_k+1}$ （ただし p_k は k 番目の素数）を対応させると，これは自然数の有限列全体から自然数への 1 対 1 関数になり，任意の長さの自然数列を一つの自然数にコード化することができる．すなわち，$2^{a_1+1} \cdots p_k^{a_k+1}$ が列を表現したコードであり，これを素因数分解すればもとの列を完全に復元することができる．これ以外にも任意の長さの自然数列を一つの自然数にコード化する方法はたくさんあるが，この節では「ゲーデルの β 関数」を用いた方法を導入する．これは次節（1.6 節）や第 5 章で重要な役割を果たすことになるが，とくに第 5 章で第二不完全性定理を詳細に証明するために「1.5 節での議論がいかに行われているか」を知ることが必要になるので，ここでは各定理の証明をややていねいに与えることにする．

なお，この 1.5 節とつぎの 1.6 節は技術的に詳細な議論を含むので，初めての読者はここを飛ばして第 2 章以降を先に読み，この二つの節は後で必要に応じて読み返せばそれで十分である．

x が y の約数であることを $x|y$ と記し，x を y で割った余りを $\mathrm{rm}(x, y)$ で表す．x と y の最大公約数が 1 であるとき，x と y は互いに素であるという．正整数 $x_0, \ldots, x_n$ の最小公倍数を $\mathrm{lcm}_{i=0}^{n}(x_i)$ と書く．

補題 1.3　1 以上の自然数 m, n が互いに素であるならば，$m{\cdot}x - n{\cdot}y = 1$ なる自然数 x, y が存在する．

証明　互いに素な自然数 $m, n\ (> 0)$ を任意に固定する．自然数 a について，条件

$$m{\cdot}x - n{\cdot}y = a \text{ なる自然数 } x, y \text{ が存在する}$$

が成り立つことを $P(a)$ と記すことにする．するとつぎの (1)(2) は簡単に示される．

(1) $P(m)$，および $P(n)$ （なぜなら，それぞれ $(x, y) = (1, 0), (n, m-1)$ とすればよい）．

(2) $P(d)$ ならば $P(q{\cdot}d)$ （ただし d, q は任意の自然数）．

さらにつぎも成り立つ．

(3) $(a > b,\ P(a),\ P(b))$ ならば $P(a{-}b)$．

なぜなら，$m{\cdot}x - n{\cdot}y = a$ かつ $m{\cdot}u - n{\cdot}v = b$ ならば

$$m{\cdot}\Big(x{+}n{\cdot}v{+}(n{-}1){\cdot}u\Big) - n{\cdot}\Big(y{+}m{\cdot}u{+}(m{-}1){\cdot}v\Big) \ = \ a{-}b$$

だからである．さて，ここで d を $P(d)$ が成り立つ 1 以上の d のうちの最小の自然数とする．するとつぎが成り立つ．

(4) $P(a)$ ならば $d|a$ （ただし a は任意の自然数）．

なぜなら，$r = \mathrm{rm}(a, d)$ とすると適当な q に対して $r = a - q{\cdot}d$ であり，(2)(3) および d の最小性により，$r = 0$ になるからである （$r > 0$ だとすると (3) を $b = q{\cdot}d$ で適用できて，$P(r)$ かつ $r < d$ になってしまう）．ところで m, n は互いに素であったので，(1)(4) により $P(1)$ となる．　■

補題 1.4　自然数 s, t, m, n が $s < m$ かつ $t < n$ であって，m と n が互いに素であるならば，$\mathrm{rm}(k, m) = s$ かつ $\mathrm{rm}(k, n) = t$ を満たす自然数 k が存在する．

証明　$s = t$ の場合には $k = m{\cdot}n + s$ とすればよい．$s > t$ の場合には補題 1.3 の結論（すなわち $P(1)$）とその証明中の (2) によって $P(s-t)$ となり，$k = m{\cdot}x + t = n{\cdot}y + s$ とできる．$s < t$ の場合も同様である．■

定理 1.5（中国剰余定理）　$n, x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$ は以下を満たす自然数とする．

- $i \neq j$ ならば y_i と y_j は互いに素．
- 各 i に対して $x_i < y_i$.

すると，つぎの条件を満たす自然数 a が存在する．

- $a < \mathrm{lcm}_{i=0}^{n}(y_i)$.
- 各 i に対して $\mathrm{rm}(a, y_i) = x_i$.

証明　n に関する帰納法による．$n = 0$ のときには $a = x_0$ とすればよい．$n = n'+1$ のときには帰納法の仮定によって，

- $a' < \mathrm{lcm}_{i=0}^{n'}(y_i)$,
- 各 $i \leq n'$ に対して $\mathrm{rm}(a', y_i) = x_i$

となるような自然数 a' が存在する．$\mathrm{lcm}_{i=0}^{n'}(y_i)$ と $y_{n'+1}$ が互いに素であることは簡単に示されるので，補題 1.4 を

$s = a'$, $t = x_{n'+1}$, $m = \mathrm{lcm}_{i=0}^{n'}(y_i)$, $n = y_{n'+1}$（この n は補題中の n）

として適用すると，

$$\mathrm{rm}(k,\ \mathrm{lcm}_{i=0}^{n'}(y_i)) = a', \quad \mathrm{rm}(k,\ y_{n'+1}) = x_{n'+1},$$

なる自然数 k が得られる．そしてこれを用いて

$$a = \mathrm{rm}(k,\ \mathrm{lcm}_{i=0}^{n'+1}(y_i))$$

とすれば，これが求める a になることが簡単に示される． ■

補題 1.6 m を 1 以上の自然数とし，$d = \mathrm{lcm}_{x=1}^{m}(x)$ とする．すると，$0 \leq i < j \leq m$ なるどんな i, j に対しても，二つの自然数

$$(i+1)\cdot d + 1, \quad (j+1)\cdot d + 1$$

は互いに素である．

証明 補題中の二つの自然数が互いに素でないと仮定する．すなわち $0 \leq i < j \leq m$ であって

$$(\dagger)\ \ p|((i+1)\cdot d + 1) \text{ かつ } p|((j+1)\cdot d + 1)$$

となる i, j および素数 $p > 1$ が存在するとする．すると $(\dagger)$ より $p|((j-i)\cdot d)$ となるが，このことから $p \leq m$ であることがわかる（なぜなら，$j - i \leq m$, $d = \mathrm{lcm}_{x=1}^{m}(x)$ であることから，$((j-i)\cdot d)$ のどんな素因数も m 以下でなければならない）．したがって $p|\mathrm{lcm}_{x=1}^{m}(x)$ すなわち $p|d$ となるが，すると $(\dagger)$ から $p|1$ となって矛盾する． ■

ここで 3 変数関数 β および 1 変数関数 δ, γ をつぎのように定義する．

$$\beta(x, y, i) = \mathrm{rm}(x,\ (i+1)\cdot y+1).$$

$$\delta(x) = \mathrm{lcm}_{i=1}^{x}(i) \quad \text{（ただし } \delta(0) = 1 \text{ とする）}.$$

$$\gamma(x) = \mathrm{lcm}_{i=0}^{x}((i+1)\cdot\delta(x) + 1).$$

するとつぎが成り立つ．

定理 1.7（β 関数定理） n および $x_0, x_1, \ldots, x_n$ を任意の自然数とし，m をこの $(n+2)$ 個の自然数の中の最大値とする．すると以下の条件を満たす自然数 a が存在する．

- $a < \gamma(m)$.
- $0 \le i \le n$ ならば $\beta(a, \delta(m), i) = x_i$.

証明　$y_i = (i+1)\cdot\delta(m)+1 = (i+1)\cdot\mathrm{lcm}_{j=1}^{m}(j)+1$ として，中国剰余定理（定理 1.5）と補題 1.6（$n = 0$ のときには不要）による． ■

さて，2 変数関数 pair および 1 変数関数 1st と 2nd をつぎで定義する．

$\mathrm{pair}(x, y) = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$.

$\mathrm{1st}(z) = \mu x\Big((\exists y < (z+1))(z = \mathrm{pair}(x, y))\Big)$　（すなわち，$y < (z+1)$，$z = \mathrm{pair}(x, y)$ を満たす y が存在するような最小の x）．

$\mathrm{2nd}(z) = \mu y\Big((\exists x < (z+1))(z = \mathrm{pair}(x, y))\Big)$.

すると，図 1.5 のように pair は（自然数 $\times$ 自然数）から自然数への全単射

$x \backslash y$	0	1	2	3	$\cdots$
0	0	1	3	6	$\cdots$
1	2	4	7	11	$\cdots$
2	5	8	12	17	$\cdots$
3	9	13	18	24	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

図 1.5　$\mathrm{pair}(x, y)$ の値

になり，1st と 2nd は

$$\mathrm{1st}(\mathrm{pair}(x, y)) = x, \quad \mathrm{2nd}(\mathrm{pair}(x, y)) = y$$

を満たす pair の逆関数になる．そして，自然数のペア (a, b) をつぎの方法で一つの自然数 e にコード化することができる．

コード化　$e = \mathrm{pair}(a, b)$

復元　$a = \mathrm{1st}(e)$，$b = \mathrm{2nd}(e)$

ここで先ほどの関数 β とこれらを使って

$$\mathrm{decode}(e,i)=\beta(\mathrm{1st}(e),\mathrm{2nd}(e),i)$$

という関数 decode を定義すると，自然数の有限列 $x_0,\ldots,x_n$ は以下の方法で一つの自然数 e にコード化できる．

コード化 $e=\mu e\Big((\forall i\leq n)(\mathrm{decode}(e,i)=x_i)\Big)$

復元 $x_i=\mathrm{decode}(e,i)$

つぎの定理は，この方法が妥当であること（どんな有限列もコード化されること）を保証している．

定理 1.8（有限列コード化定理） 自然数の任意の有限列 $x_0,\ldots,x_n$ に対して，以下を満たす自然数 e が存在する．

$$0\leq i\leq n \text{ なるすべての } i \text{ に対して } \mathrm{decode}(e,i)=x_i.$$

証明 β 関数定理（定理 1.7）を適用して得られる m と a を用いて $e=\mathrm{pair}(a,\delta(m))$ とすればよい． ■

1.6 原始再帰の消去

この節では前節の結果を使って「タネになる関数を少しだけ増やせば原始再帰を使わずに再帰的関数を定義できる」ということを証明する．この結果は不完全性定理を証明するために使われる「表現定理」(2.5 節) で必要になる．

自然数上の関数のクラス Recu を以下の (1)–(3) で定義する．

(1) 足し算 $+$，かけ算 $\cdot$，射影関数 P_i^k，等号の特性関数 equal はすべて Recu に属す．ただし等号の特性関数とはつぎのものである．

$$\mathrm{equal}(x,y)=\begin{cases}1 & (x=y \text{ のとき})\\ 0 & (x\neq y \text{ のとき})\end{cases}$$

(2) Recu に属する関数から関数合成で得られる関数はまた Recu に属す.

(3) Recu に属する関数から最小化で得られる関数はまた Recu に属す.

すなわち Recu は，1.2 節の再帰的関数の定義に足し算とかけ算を加え，ゼロ関数と後者関数と原始再帰を取り除いたものである．Recu に属する関数が再帰的であることはただちにわかる．以下ではこの逆，すなわち任意の再帰的関数は Recu に属すること（定理 1.14）を証明する.

補題 1.9 k 変数のゼロ関数 $\mathrm{Z}_k(\vec{x}) = 0$，1 変数の恒等関数 $\mathrm{one}(x) = 1$，および後者関数 $\mathrm{S}(x)$ はすべて Recu に属す（したがって任意の恒等関数は Recu に属す）.

証明 $\mathrm{Z}_k(\vec{x}) = \mu y\Big(\mathrm{P}^{k+1}_{k+1}(\vec{x}, y) = 0\Big) = \mu y(y = 0)$.
$\mathrm{one}(x) = \mu y\Big(\mathrm{equal}(\mathrm{Z}_2(x, y), \mathrm{P}^2_2(x, y)) = 0\Big) = \mu y\Big(\mathrm{equal}(0, y) = 0\Big)$.
$\mathrm{S}(x) = \mathrm{P}^1_1(x) + \mathrm{one}(x)$. ■

以後一般に述語 P の特性関数を P° と書く．すなわち,

$$P^\circ(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & (P(\vec{x}) \text{ が成り立つとき}) \\ 0 & (P(\vec{x}) \text{ が成り立たないとき}) \end{cases}$$

である．特性関数が Recu に属すような述語を「Recu 述語」と呼ぶ.

補題 1.10 Recu 述語から否定（$\neg$），論理積（$\wedge$），論理和（$\vee$）で作られる述語はまた Recu 述語である.

証明 $(\neg A)^\circ(\vec{x}) = \mathrm{equal}(A^\circ(\vec{x}), 0)$.
$(A \wedge B)^\circ(\vec{x}) = A^\circ(\vec{x}) \cdot B^\circ(\vec{x})$.
$(A \vee B)^\circ(\vec{x}) = (\neg((\neg A) \wedge (\neg B)))^\circ(\vec{x})$. ■

補題 1.11 Recu 述語 $A(\vec{x}, y)$ が条件「どんな $\vec{x}$ に対しても適当な y をとれば $A(\vec{x}, y)$ が成り立つ」を満たすならば,

$$f(\vec{x}) = \mu y\ A(\vec{x}, y)$$

なる関数 f は Recu に属す.

証明 $f(\vec{x}) = \mu y\Big((\neg A)^\circ(\vec{x}, y) = 0\Big)$. ■

補題 1.12 $A(\vec{x}, y)$ が Recu 述語ならば，$\vec{x}, z$ を変数とする述語 $(\exists y < z)$ $A(\vec{x}, y)$ と $(\forall y{<}z)A(\vec{x}, y)$ はともに Recu 述語である．

証明 $(\exists y{<}z)A(\vec{x}, y) \iff \Big(\mu y\Big(y{=}z \lor A(\vec{x}, y)\Big)\Big) \neq z.$
$(\forall y{<}z)A(\vec{x}, y) \iff \neg(\exists y{<}z)\neg A(\vec{x}, y).$ ■

補題 1.13 1.5 節の関数 pair，1st，2nd，rm，β，decode はすべて Recu に属す．

証明 「2 で割る」関数

$$\mathrm{half}(x) = \mu y\Big((2{\cdot}y{=}x) \lor (2{\cdot}y{+}1{=}x)\Big)$$

を用いれば，pair，1st，2nd が Recu に属することがわかる．また，

$$\mathrm{rm}(x, y) = \mu z\Big((\exists q{<}(x{+}1))(x = q{\cdot}y{+}z)\Big)$$

とでき，これらによって β，decode は定義される． ■

定理 1.14 任意の再帰的関数 f は Recu に属す．

証明 再帰的関数の定義に関する帰納法による．f がゼロ関数や後者関数の場合は補題 1.9 よりいえる．f が射影関数の場合や，他の関数から関数合成や最小化で得られた場合は，Recu の定義と帰納法の仮定より明らか．f が g, h から原始再帰で得られた場合を考える．すなわち，

$$f(\vec{x}, y) = \begin{cases} g(\vec{x}) & (y = 0 \text{ のとき}) \\ h(\vec{x}, y{-}1, f(\vec{x}, y{-}1)) & (y > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるとする．このとき，自然数列

$$f(\vec{x}, 0), f(\vec{x}, 1), \ldots, f(\vec{x}, y)$$

のコード（定理 1.8 の直前で説明した方法による）を $\vec{x}, y$ から求める関数 t は，つぎのように書ける．

$$t(\vec{x}, y) = \mu e\Big(\mathrm{decode}(e, 0) = g(\vec{x}) \wedge \\ (\forall i < y)(\mathrm{decode}(e, i+1) = h(\vec{x}, i, \mathrm{decode}(e, i)))\Big).$$

($i = 0, 1, \ldots, y$ に対して $\mathrm{decode}(e, i) = f(\vec{x}, i)$ となっている.) 今までの補題と定理 1.8 と帰納法の仮定によって t が Recu に属することが示され，そして

$$f(\vec{x}, y) = \mathrm{decode}(t(\vec{x}, y), y)$$

となるので，f も Recu に属する. ■

結局，Recu に属す関数によるコード化を用いて原始再帰を実現したことが，ここでのポイントである.

第2章
ペアノ算術

不完全性定理は，算術の理論における証明不可能性を分析した定理である．この章では，まず算術の理論とは何であるかを定義したうえで，ペアノ算術 (Peano arithmetic; PA) という理論を導入して，その Σ_1 完全性，再帰的関数の表現可能性といった重要な性質を示す．

2.1 論理式

算術の理論で証明可能な命題の具体例は 1.5 節で示されている．そこでは，たとえば中国剰余定理という非自明な事実が，推論を重ねることによって証明されている．そのように，数学の証明というのは自明な主張から出発して推論を重ねていくことで非自明な主張に至るプロセスを明記したものである．そして何かが証明可能だということを示すには，実際に証明を書いてみせれば十分である．

しかし，何かが証明不可能であることを示すには，「証明可能」という概念を厳密に定義する必要がある（第 1 章でみたように，何かが計算不可能ということを示すには「計算可能」という概念の定義を与える必要があるのと同じである）．そこで，初めにつぎのように考える．

証明とは主張の明記の適切な積み重なりである．そして，ある主

張に至る証明が存在するとき，その主張は証明可能であるという．

この節では「主張の明記」とは何であるかを定義する．次節で，それらの適切な積み重なりである「証明」を定義する．

主張の明記とは，たとえば「$1+1=2$」「どんな自然数にもそれより大きな素数が存在する」といったものである．ここで後者はつぎのように書いてもよい．

$$\forall x \exists y \Big((x < y) \wedge \mathrm{Prime}(y) \Big)$$

ただし x, y は自然数を表す変数であり，「$\forall x$」は「どんな x に対しても」，「$\exists y$」は「ある y が存在して」，「$\wedge$」は「かつ」を表し，Prime は「素数である」を表す述語とする．このようにいくつかの要素（この例の場合は $\forall$, x, $\exists$, y, $<$, $\wedge$, Prime の 7 種類と開き括弧および閉じ括弧）を適切に組み合わせてできる文字列を論理式 (formula) と呼び，「主張の明記」とは論理式のことであるとする．

もう少していねいに論理式を説明しよう．

論理式の構成に使う要素は数学のどんな分野を考えているかで異なってくる．ここでは自然数の算術を考えるので，つぎのものが使えるとする．

> 自然数を表す変数（$\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots$ などいくらでも必要なだけ用意される．以後，a, b, m, n, x, y などのイタリック体小文字は原則として変数を表す.）
>
> 定数 0
>
> 関数記号 S, $+$, $\cdot$
>
> 等号 $=$
>
> 不等号 $<$
>
> 論理記号 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$

関数記号 S, $+$, $\cdot$ はそれぞれ，後者関数（すなわち $\mathrm{S}(x)=x+1$），足し算，かけ算，を表している．また各論理記号は，φ, ψ が論理式，x が変数のとき，つぎのような意味を表している．

$\neg\varphi$ ··· 「φ ではない」

$\varphi\wedge\psi$ ··· 「φ かつ ψ」

$\varphi\vee\psi$ ··· 「φ または ψ」

$\varphi\to\psi$ ··· 「φ ならば ψ」

$\varphi\leftrightarrow\psi$ ··· 「『φ ならば ψ』かつ『ψ ならば φ』」
（すなわち「φ と ψ は同値である」）

$\forall x\varphi$ ··· 「どんな x に対しても φ」

$\exists x\varphi$ ··· 「ある x が存在して φ」

なお，論理記号はこんなに多種類なくてもよい．たとえば $\exists x\varphi$ と $\neg\forall x\neg\varphi$ は，「φ を満たす x がある」と「『どんな x も φ を満たさない』というわけではない」で同じ意味になるので，このような書き換えをすれば記号 $\exists$ は不要になる．逆に，定数，関数，述語記号は上記のもの（0, S, $+$, $\cdot$, $=$, $<$）だけでは少なすぎると感じるかもしれないが，実はこれだけあれば十分な記述ができる．たとえば「素数である」という意味の述語 Prime は入っていないが，

$$\forall x\forall y\Big(((x<n)\wedge(y<n))\to\neg(x\cdot y=n)\Big)$$

が Prime(n) と同じ意味を表すので，これを用いればよい．

以上の記号を組み合わせてできる記号列で，たとえばつぎの四つ

0

$\mathrm{S}(0)+\mathrm{S}(\mathrm{S}(0))$

x

$(\mathrm{S}(x)+0)\cdot y$

（x, y は変数）のように自然数を表すものを項 (term) と呼ぶ．また，たとえばつぎの四つ

$0=0$

$$\forall x\Big((\neg(x = 0)) \to \exists y(x = \mathrm{S}(y))\Big)$$

$$\exists y\Big(\mathrm{S}(\mathrm{S}(0))\cdot y \;=\; \mathrm{S}(0)\Big)$$

$$\exists y\Big(\mathrm{S}(\mathrm{S}(0))\cdot y \;=\; x\Big)$$

のように自然数に関する命題を表すものを論理式と呼ぶ．ここにあげた四つの項の中で，初めの二つは指す値が定まっているが（たとえば $\mathrm{S}(0)+\mathrm{S}(\mathrm{S}(0))$ の値は 3 である），残りの項は変数 x, y の値が決まらないと値が確定しない．また四つの論理式の中で，初めの三つは真偽が定まっているが（初めの二つは真，3 番目の $\exists y\Big(\mathrm{S}(\mathrm{S}(0))\cdot y \;=\; \mathrm{S}(0)\Big)$ は「$2\cdot y = 1$ となる自然数 y が存在する」といっているので偽），4 番目の $\exists y\Big(\mathrm{S}(\mathrm{S}(0))\cdot y \;=\; x\Big)$ は変数 x の値が決まらないと真偽が確定しない（x が偶数ならば真，奇数ならば偽）．この最後の論理式中の x のように，$\forall$ や $\exists$ で指示されておらず値を代入することができる変数が出現する場合，その変数のことを自由変数と呼ぶ（y は $\exists$ で指示されている）．そして，自由変数が現れない（したがって真偽が確定している）論理式のことを文 (sentence) と呼ぶ．

なお，ここで「文 φ が真である」といっているのは，正確にはつぎのようなことである．

> 変数の動く範囲を自然数全体（$0, 1, 2, \ldots$）として，定数 0，関数 S, $+$, $\cdot$, 等号 $=$，不等号 $<$ をそれぞれ自然数上の通常の意味に解釈したときに，φ が真になる．

このような記号の解釈を算術の標準モデル (standard model) と呼び N と書く．そして，φ が標準モデルで真であることを $\mathrm{N} \models \varphi$ と表記する．

この節の残りで，項や論理式の表記に関する約束をいくつか定めておく．

t, u などは項を表し，φ, ψ, A, B などは論理式を表す．

「$\equiv$」は「右辺と左辺が等しい文字列である」を意味する．たとえば論理式 φ, ψ について「$\varphi \equiv \psi$」と書いたら，「φ と ψ はまったく同じ論理式である」または「論理式 φ を ψ で定義する」ということである．

変数などの列 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を $\vec{x}$ と表記することがある．この場合

$$\forall\vec{x}\varphi \;\equiv\; \forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_k \varphi$$

である．

$\forall$ と $\exists$ に関してつぎの省略記法を定める．

$$(\forall x < t)\varphi \;\equiv\; \forall x((x < t) \to \varphi)$$

$$(\exists x < t)\varphi \;\equiv\; \exists x((x < t) \land \varphi)$$

これらの論理式はそれぞれ「t 未満のすべての x に対して φ が成り立つ」「φ が成り立つような t 未満の x が存在する」を意味している．同様に，$(\forall x \leq t)\varphi$, $(\forall x > t)\varphi$ などの表記もそれぞれ $\forall x((x < \mathrm{S}(t)) \to \varphi)$，$\forall x((t < x) \to \varphi)$ などの省略として適宜用いる．

論理式を，その中のいくつかの自由変数 $\vec{x}$ を指定して $\varphi(\vec{x})$ と書くことがある．このとき指定された $x_1, \ldots, x_k$ をそれぞれ項 $t_1, \ldots, t_k$ に書き換えて得られる論理式を $\varphi(\vec{t})$ で表す．

定数が 0 しかないので，自然数 0, 1, 2, ... を項で表現したいときには 0, S(0), S(S(0)), ... を用いる．これらの項のことを数項 (numeral) と呼び，$\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ... と表記する．

2.2 証明

「証明」とは，真であることが自明に認められる論理式から始まって，適切なプロセスによって続いていく論理式の列である．ここで「真であることが自明に認められる論理式」には，たとえばつぎの四つ

$$0 = 0$$

$$(x = y) \to (\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y))$$

$$(x < y) \lor \neg(x < y)$$

$$\forall x \neg(x < 0)$$

などがあり，このようなものを公理 (axiom) と呼ぶ．また「適切なプロセス」には

$$\varphi \text{ と } \varphi \to \psi \text{ から } \psi \text{ を得る}$$

といったものがあり，このようなものを推論規則 (inference rule) と呼ぶ．

公理には，数学のどんな場面でも共通に用いられるものと，分野や対象に固有のものがある．たとえば $t = t$ や $(t = u) \to (f(t) = f(u))$ や $\varphi \vee \neg\varphi$（t, u は任意の項，f は任意の関数記号，φ は任意の論理式）といった論理式はどんな数学理論においても公理として認められるだろう（上記の初めの三つの公理はこれらの形をしている）．1 階述語論理の公理系とは，まさにそのような「どんな数学理論においても認められる公理と推論規則のセット」であり，数学の推論で使用される論理的な部分をすべて含んでいるものである．その詳細はここでは記さないが，数理論理学のたいていの教科書（たとえば本シリーズ第 2 巻第 I 部）において説明されているので確認をされたい．

一方，上記の 4 番目の公理 $\forall x \neg(x < 0)$ は，負数までを含めた整数の理論を考えるならば公理ではなく，これはここで考えている理論に固有の公理である．このような「固有の公理」を 1 階述語論理の公理系に加えることによって体系が定まり，それを理論 (theory) と呼ぶ．理論 T における論理式 φ の証明 (proof) とは，T の公理（すなわち 1 階述語論理の公理や固有の公理）から出発して推論規則の適用によって続いていき φ に至る論理式の列である．そしてそのような証明が存在するとき，「理論 T で論理式 φ が証明できる」といい $T \vdash \varphi$ と表記する．$T \nvdash \varphi$ はそのような証明が存在しないことを表す．

算術の理論は固有の公理の取り方でさまざまに定義できる．ここでは，不完全性定理の議論のベースに用いられることの多い PA（ペアノ算術）という理論を導入する（なお，PA の定義は文献によって多少の違いがある）．

PA の固有の公理はつぎのものである．

後者関数に関する公理

$$\forall x \neg(\mathrm{S}(x) = 0)$$
$$\forall x \forall y \Big((\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y)) \to (x = y)\Big)$$

足し算に関する公理（足し算の再帰的な定義）

$$\forall x(x+0 = x)$$

$$\forall x\forall y(x+\mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x+y))$$

かけ算に関する公理（かけ算の再帰的な定義）

$$\forall x(x\cdot 0 = 0)$$

$$\forall x\forall y(x\cdot\mathrm{S}(y) = (x\cdot y)+x)$$

不等号に関する公理（不等号の再帰的な定義）

$$\forall x\neg(x < 0)$$

$$\forall x\forall y\Big((x < \mathrm{S}(y)) \leftrightarrow ((x < y) \vee (x = y))\Big)$$

帰納法の公理

$$\forall\vec{y}\Big(\Big(\varphi(0,\vec{y}) \wedge \forall x(\varphi(x,\vec{y}) \to \varphi(\mathrm{S}(x),\vec{y}))\Big) \to \forall x\varphi(x,\vec{y})\Big)$$

後者関数に関する公理と帰納法の公理は，「ペアノによる自然数の公理」を 1 階述語論理で展開したものに相当する．具体的には，後者関数に関する公理は「0 から『S を付ける／外す』という操作で到達できるもの全体は，0 を始点として合流や枝分かれのない 1 本の筋になっている」ということをいっている（2 番目の公理の「逆向き」である $\forall x\forall y((x=y)\to(\mathrm{S}(x)=\mathrm{S}(y)))$ はこの節の冒頭に登場した 1 階述語論理の公理であり，したがって PA の公理にもなっている）．帰納法の公理は「$A(n)$ がすべての自然数 n に対して成り立つことを示すには，『$A(0)$ は成り立つ』『$A(x)$ が成り立つならば $A(x+1)$ も成り立つ』を示せばよい」という数学的帰納法を意味している（$\vec{y}$ を任意に固定して $\varphi(n,\vec{y})$ を $A(n)$ と考える）．ここで論理式 $\varphi(x,\vec{y})$ の取り方は任意なので，この帰納法の公理の形にあてはまる無限個の論理式がすべて公理になっている．

PA における証明の例をみてみよう．たとえば $\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}$ といった自明な命題も，それ自身は公理でないので証明によって導く必要がある．

(i) $\overline{1}+\mathrm{S}(0)=\mathrm{S}(\overline{1}+0)$.　　（足し算に関する公理より）

(ii) $\overline{1}+0=\overline{1}$.　　（足し算に関する公理より）

(iii) $\mathrm{S}(\overline{1}+0)=\mathrm{S}(\overline{1})$. （ii より）

(iv) $\overline{1}+\mathrm{S}(0)=\mathrm{S}(\overline{1})$, すなわち $\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}$. （i, iii より）

ただしここで，1 階述語論理の公理や推論規則は明記せずに用いている（以下同様）．$\neg(\overline{1}+\overline{1}=\overline{4})$ はつぎのように証明できる．

(v) $\neg(\overline{2}=0)$. （後者関数に関する公理より）

(vi) $(\overline{3}=\overline{1})\rightarrow(\overline{2}=\overline{0})$. （後者関数に関する公理より）

(vii) $\neg(\overline{3}=\overline{1})$. （v, vi より）

(viii) $(\overline{4}=\overline{2})\rightarrow(\overline{3}=\overline{1})$. （後者関数に関する公理より）

(ix) $\neg(\overline{4}=\overline{2})$. （vii, viii より）

(x) $\neg(\overline{1}+\overline{1}=\overline{4})$. （iv, ix より）

不等号に関して，たとえば $(x<\overline{2})\rightarrow((x=0)\vee(x=\overline{1}))$ はつぎのように証明できる．

(xi) $(x<\overline{1})\rightarrow((x<0)\vee(x=0))$. （不等号に関する公理より）

(xii) $(x<\overline{1})\rightarrow(x=0)$. （xi と不等号に関する公理より）

(xiii) $(x<\overline{2})\rightarrow((x<\overline{1})\vee(x=\overline{1}))$. （不等号に関する公理より）

(xiv) $(x<\overline{2})\rightarrow((x=0)\vee(x=\overline{1}))$. （xii, xiii より）

帰納法の公理を使った例として，$(x=0)\vee(0<x)$ を証明する．

(xv) $0=0$. （1 階述語論理の公理より）

(xvi) $(0=0)\vee(0<0)$. （xv より）

(xvii) $((0<x)\vee(0=x))\rightarrow(0<\mathrm{S}(x))$. （不等号に関する公理より）

(xviii) $((x=0)\vee(0<x))\rightarrow((\mathrm{S}(x)=0)\vee(0<\mathrm{S}(x)))$. （xvii より）

(xix) $\forall x((x = 0) \vee (0 < x))$.　　　($\varphi(x, \vec{y}) \equiv ((x = 0) \vee (0 < x))$ とした帰納法の公理と，xvi, xviii より)

このようにやっていけば，けっこういろいろなことが（実際に書くのは大変だが）証明できる．しかし自然数のすべての性質が PA で証明できるわけではない．そしてそのことは不完全性定理によって示されるのである．

2.3　PA の基本的な証明能力

この節では，今後必要になる PA のいくつかの基本的な証明能力を示しておく．

定理 2.1　つぎが成り立つ．

(1) 任意の自然数 n, m に対して，$\mathrm{PA} \vdash \overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$.

(2) 任意の自然数 n, m に対して，$\mathrm{PA} \vdash \overline{n} \cdot \overline{m} = \overline{n \cdot m}$.

証明　m に関する帰納法による．正確には，たとえば (1) の場合，n を任意に固定した自然数としたとき，m に関する数学的帰納法によってつぎを示す．

どんな m に対しても $\mathrm{PA} \vdash \overline{n} + \overline{m} = \overline{n+m}$ が成り立つ．

なお，これは PA の体系内で帰納法の公理を使用したのではなく，PA の性質を論じるメタな立場での帰納法の使用である．■

定理 2.2　t, u は変数を含まない項とする．このときつぎが成り立つ．

(1) $\mathrm{N} \models t = u$ ならば $\mathrm{PA} \vdash t = u$.

(2) $\mathrm{N} \models \neg(t = u)$ ならば $\mathrm{PA} \vdash \neg(t = u)$.

(3) $\mathrm{N} \models t < u$ ならば $\mathrm{PA} \vdash t < u$.

(4) $\mathrm{N} \models \neg(t < u)$ ならば $\mathrm{PA} \vdash \neg(t < u)$.

証明　たとえば前節の証明例 (i)–(iv) や (v)，(vii)，(ix)，(x) が (1) や (2) の例になっている．一般の場合は定理 2.1 の結果をもとに示される．たとえば (1) は，つぎの事実を t の複雑さに関する帰納法で示して，それを用いればよい．

> t は変数を含まない項でその値が n ならば（すなわち $\mathrm{N} \models t = \overline{n}$ ならば)，$\mathrm{PA} \vdash t = \overline{n}$ である．

■

定理 2.3　つぎが成り立つ．

(1) 任意の自然数 n に対して，$\mathrm{PA} \vdash (\forall x < \overline{n+1})(x = 0 \lor x = \overline{1} \lor \cdots \lor x = \overline{n})$.

(2) 任意の自然数 n に対して，$\mathrm{PA} \vdash \forall x(x = 0 \lor x = \overline{1} \lor \cdots \lor x = \overline{n} \lor \overline{n} < x)$.

証明　前節の証明例 (xiv)（に $\forall x$ を付けたもの）や (xix) がこれらの例になっており，他の場合も同様にできる． ■

定理 2.4　つぎが成り立つ．

(1) n を任意の自然数，$\varphi(x)$ を任意の論理式とする．「$m < n$ なるすべての m で $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{m})$」が成り立つならば，

$$\mathrm{PA} \vdash (\forall x < \overline{n})\varphi(x)$$

である．

(2) n を任意の自然数，$\varphi(x), \psi(x)$ を任意の論理式とする．「$m < n$ なるすべての m で $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{m})$」と「$\mathrm{PA} \vdash \psi(\overline{n})$」が成り立つならば，

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x\Big(\neg(x = \overline{n}) \to (\varphi(x) \lor (\exists y < x)\psi(y))\Big)$$

である（y は x と異なる変数）．

証明 (1) $n=0$ の場合は不等号に関する公理 $\forall x \neg(x<0)$ からいえる．$n \geq 1$ の場合は，定理の前提から

$$(\dagger) \quad \mathrm{PA} \vdash \forall x\Big((x\!=\!0 \vee x\!=\!\overline{1} \vee \cdots \vee x\!=\!\overline{n-1}) \to \varphi(x)\Big)$$

であり，定理 2.3(1) からいえる．

(2) 定理の前提（$\mathrm{PA} \vdash \psi(\overline{n})$）から

$$\mathrm{PA} \vdash (\overline{n}\!<\!x) \to \exists y((y\!<\!x) \wedge \psi(y))$$

となり，また先ほどの $(\dagger)$ も成り立つので，定理 2.3(2) と合わせて

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x\Big(\varphi(x) \vee (x\!=\!\overline{n}) \vee \exists y((y\!<\!x) \wedge \psi(y))\Big)$$

となり，これから求めるものが得られる． ■

2.4 Σ_1 完全性

ここでは Σ_1, Π_1, Δ_1 という論理式の種類を定め，PA の重要な性質である Σ_1 完全性を証明する．

まず Σ_1 論理式を以下の (1)–(3) で再帰的に定義する．

(1) $t=u$, $\neg(t=u)$, $t<u$, $\neg(t<u)$ （ただし t, u は項）という形の論理式はすべて Σ_1 である．

(2) φ' と φ'' が Σ_1 論理式で，x が変数で t が x を含まない項ならば，$\varphi'\wedge\varphi''$, $\varphi'\vee\varphi''$, $\exists x\varphi'$, $(\forall x\!<\!t)\varphi'$ という形の論理式はすべて Σ_1 である．

(3) Σ_1 論理式 ψ が存在して $\mathrm{PA} \vdash \varphi\leftrightarrow\psi$ となるならば，φ も Σ_1 論理式である．

そして Σ_1 論理式の否定と同値なものを Π_1 論理式とし，また Σ_1 かつ Π_1 であるものを Δ_1 論理式とする．すなわち，つぎのように定義する．

$$\varphi \text{ は } \Pi_1 \text{ である} \iff \Sigma_1 \text{ 論理式 } \psi \text{ が存在して } \mathrm{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\psi$$

$$\varphi \text{ は } \Delta_1 \text{ である} \iff \varphi \text{ は } \Sigma_1 \text{ かつ } \Pi_1 \text{ である}$$

（なお，$\Sigma_1, \Pi_1, \Delta_1$ などの定義は文献によって多少の違いがある.）

定理 2.5（Σ_1 完全性定理）　φ が Σ_1 文（すなわち自由変数を含まない Σ_1 論理式）で $\mathrm{N} \models \varphi$ であるならば $\mathrm{PA} \vdash \varphi$ である．すなわち，正しい Σ_1 文は PA で証明できる．

この定理はつぎの補題の特別な場合になるので，補題を示すことにより証明は完了する．

補題 2.6　論理式 φ の自由変数に数項を代入して得られる文のことを φ の代入結果と呼ぶことにする．φ を任意の Σ_1 論理式とし，文 φ^* が φ の代入結果で $\mathrm{N} \models \varphi^*$ であるならば，$\mathrm{PA} \vdash \varphi^*$ である．

証明　φ が Σ_1 論理式であることの定義に関する帰納法による．φ が $t = u$, $\neg(t = u)$, $t < u$, $\neg(t < u)$ という形のときは定理 2.2 で示された．φ が $\varphi' \wedge \varphi''$ または $\varphi' \vee \varphi''$ または $\exists x \varphi'(x)$ のときは，帰納法の仮定から簡単に示される．φ が $(\forall x < t)\varphi'(x)$ のときには，n を $\mathrm{N} \models (t^* = \overline{n})$ なる自然数とすると，帰納法の仮定から n 未満のすべての m に対して $\mathrm{PA} \vdash \varphi'(\overline{m})^*$ となり，定理 2.4(1) などを用いて $\mathrm{PA} \vdash ((\forall x < t)\varphi'(x))^*$ を得る．最後に，Σ_1 論理式 ψ に対して $\mathrm{PA} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ となるときは，帰納法の仮定と $\mathrm{PA} \vdash \varphi^* \leftrightarrow \psi^*$, $\mathrm{N} \models \varphi^* \leftrightarrow \psi^*$ より明らか．■

注意 2.7　Σ_1 完全性定理の「Σ_1 文」を「Π_1 文」に変えた命題は一般には成り立たない（3.6 節の注意 3.12(1)）．

2.5　表現可能性

定義 2.8　自然数上の関数や述語が PA において「表現 (represent) される」「表現可能 (representable) である」ということを，つぎの (1)(2) で定義する．

(1) R を自然数上の k 変数述語とし，$\varphi(\vec{x})$ を $x_1, \ldots, x_k$ 以外には自由変数を含まない論理式とする．いま，任意の自然数 $n_1, \ldots, n_k$ に対して

$$R(n_1, \cdots, n_k) \text{ が成り立つときには } \mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}),$$
$$R(n_1, \cdots, n_k) \text{ が成り立たないときには } \mathrm{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}),$$

が満たされるならば，「述語 R は PA において論理式 $\varphi(\vec{x})$ によって表現される」という．また，このような論理式が存在するときに，「述語 R は PA において表現可能である」という．

(2) f を自然数上の k 変数関数とし，$\varphi(\vec{x}, y)$ を $x_1, \ldots, x_k, y$ 以外には自由変数を含まない論理式とする．いま，$(k+1)$ 変数述語

$$f(n_1, \cdots, n_k) = n_{k+1}$$

が PA において $\varphi(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1})$ によって表現され，

$$\mathrm{PA} \vdash \forall y \forall y' ((\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, y) \wedge \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, y')) \rightarrow y = y')$$

が任意の自然数 $n_1, \ldots, n_k$ に対して成り立つならば，「関数 f は PA において論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ によって表現される」という．また，このような論理式が存在するときに，「関数 f は PA において表現可能である」という（この $\varphi(\vec{x}, y)$ を f のグラフの論理式と呼ぶ）．

注意 2.9 一般に，論理式 $\varphi(x)$ が述語 $R(x)$ を表現し，$R(n)$ がすべての自然数 n に対して成り立つならば，すべての n について $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{n})$ である．しかしこのとき $\mathrm{PA} \vdash \forall x \varphi(x)$ とは限らない．

さて，関数や述語の「計算可能性」と「PA における（Σ_1/Π_1）論理式での表現可能性」とが同値であることが，つぎの定理により示される．

定理 2.10（計算可能関数・計算可能述語の表現定理）

(1) PA において表現可能な関数や述語は，すべて計算可能である．

(2) 任意の計算可能関数，計算可能述語は，適当な Σ_1 論理式，ならびに適当な Π_1 論理式で PA において表現される．

証明 (1) たとえば k 変数関数 f がグラフ論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ によって表現されているとする．このとき，与えられた自然数の k 個組 $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_k)$ に対して関数値 $f(\vec{n})$ を計算するにはつぎのようにすればよい．

> 論理式の列を片っ端からすべてもれがないように生成しながら，それがある数 m に対する「論理式 $\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, \overline{m})$ の PA における証明」になっているかどうか調べていく．もしもこの条件を満たす列（つまり $\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, \overline{m})$ の証明）がみつかったら，この m が $f(\vec{n})$ の値である．

この手続きは計算可能である．正確にいうと，「$\vec{n}$ を入力するとこの手順に基づいていつでも正しく $f(\vec{n})$ の値を求める（1.1 節の意味での）コンピュータプログラム」が存在するが，そのことはつぎの事実に注意すればわかる．

- 論理式の有限列全体は可算無限であり，それらすべてをもれなく機械的に生成する手順が存在する．

- 論理式の列が与えられたとき，それがPAにおける証明になっているか否かは，機械的に判定可能である．なぜなら，与えられた論理式が「PA の固有の公理であるか否か」「1 階述語論理の公理であるか否か」は判定可能であり，また列 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ が与えられたとき，「φ_n は $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ から推論規則の 1 回適用で得られるものであるか否か」も判定可能であるからである．

- このプログラムの停止性，すなわちどんな $\vec{n}$ に対してもある m に対する $\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, \overline{m})$ の証明が必ずみつかることは，「表現される」ということの定義からいえる．

- このプログラムの正当性，すなわち $f(\vec{n}) \neq m'$ なる m' を答として出力しないことは，「表現される」ということの定義とPAが無矛盾であることか

らいえる（もしも m' を出力したならば，それはPA $\vdash \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, \overline{m'})$ かつPA $\vdash \neg\varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, \overline{m'})$ を意味する）．

(2) 述語 R の特性関数 f が論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ で表現されているならば，R は $\varphi(\vec{x}, \overline{1})$ で表現される．したがって，後の定理 2.12 で計算可能関数の表現可能性が示されれば，それによってこの証明は完了する． ■

補題 2.11　関数 f が PA において論理式 $\varphi(\vec{x}, y)$ によって表現されるということは，以下の条件と同値である．任意の自然数 $n_1, \ldots, n_k$ に対して

$$\mathrm{PA} \vdash \forall y(y = \overline{f(\vec{n})} \leftrightarrow \varphi(\overline{n_1}, \cdots, \overline{n_k}, y)).$$

（証明は省略する．）

定理 2.12（計算可能関数の表現定理）　任意の計算可能関数は，適当な Σ_1 論理式ならびに適当な Π_1 論理式によって，PA において表現される．

証明　任意の計算可能関数は 1.6 節で与えたクラス Recu の要素になる（定理 1.1，1.14）．そこで，$f \in \mathrm{Recu}$ なる任意の k 変数関数 f に対して，補題 2.11 の条件を満たす Σ_1 のグラフ論理式 $\varphi^{\Sigma}(\vec{x}, y)$ と Π_1 のグラフ論理式 $\varphi^{\Pi}(\vec{x}, y)$ が存在することを，Recu の定義に関する帰納法によって証明する．f が関数 $+, \cdot, \mathrm{P}_i^k$, equal のときには，それぞれ $\varphi^{\Sigma}, \varphi^{\Pi}$ ともにつぎのものにすればよい．

$$y = x_1 + x_2$$

$$y = x_1 \cdot x_2$$

$$y = x_i$$

$$((x_1 = x_2) \wedge (y = \overline{1})) \vee (\neg(x_1 = x_2) \wedge (y = \overline{0}))$$

f が $g_1, \ldots, g_l$ と h から関数合成で得られた場合には，g_i に対して帰納法の仮定により得られるグラフの論理式を $\psi_i^{\Sigma}, \psi_i^{\Pi}$ とし，h に対して帰納法の仮定により得られるグラフの論理式を $\chi^{\Sigma}, \chi^{\Pi}$ とすると，求める φ^{Σ} と φ^{Π} はそれぞれつぎのものにすればよい．

$$\exists \vec{z}\Big(\psi_1^{\Sigma}(\vec{x}, z_1) \wedge \psi_2^{\Sigma}(\vec{x}, z_2) \wedge \cdots \wedge \psi_l^{\Sigma}(\vec{x}, z_l) \wedge \chi^{\Sigma}(\vec{z}, y)\Big)$$

$$\forall \vec{z}\Big((\psi_1^{\Sigma}(\vec{x}, z_1) \wedge \psi_2^{\Sigma}(\vec{x}, z_2) \wedge \cdots \wedge \psi_l^{\Sigma}(\vec{x}, z_l)) \to \chi^{\Pi}(\vec{z}, y)\Big)$$

後者が Π_1 論理式であることは，これが

$$\neg\exists \vec{z}\Big(\psi_1^{\Sigma}(\vec{x}, z_1) \wedge \psi_2^{\Sigma}(\vec{x}, z_2) \wedge \cdots \wedge \psi_l^{\Sigma}(\vec{x}, z_l) \wedge \neg\chi^{\Pi}(\vec{z}, y)\Big)$$

と同値なことからわかる．f が g から最小化で得られた場合には，g に対して帰納法の仮定によって得られるグラフの論理式を ψ^{Σ}, ψ^{Π} とすると，求める φ^{Σ} と φ^{Π} はそれぞれつぎのものにすればよい．

$$\psi^{\Sigma}(\vec{x}, y, 0) \wedge (\forall z < y)\neg\psi^{\Pi}(\vec{x}, z, 0)$$

$$\psi^{\Pi}(\vec{x}, y, 0) \wedge (\forall z < y)\neg\psi^{\Sigma}(\vec{x}, z, 0)$$

以上の φ^{Σ} と φ^{Π} が補題 2.11 の条件を満たすことは，2.3 節であげた PA の性質などによって示される（たとえば最小化の場合に定理 2.4 を用いる）．■

2.6 PA 以外の理論

ここでの PA はゲーデルがオリジナルの論文で扱っていた体系とは異なるものであるが，さらに別の体系を基礎にした不完全性定理の議論も今日しばしばなされる．ここではそのような体系を二つ簡単に紹介する．

PA の固有の公理は無限個あったが（なぜなら帰納法の公理が無限個ある），固有の公理が有限個で第一不完全性定理に関する議論が成り立つ理論がある．「ロビンソン算術 (Robinson arithmetic)」あるいは「ロビンソンの Q」と呼ばれる理論[1)]がそうである．また，PA から帰納法の公理を取り除いて，代わりに

$$\forall x \forall y((x < y) \vee (x = y) \vee (y < x))$$

1) たとえば文献 [Odifreddi 1989] をみよ．

を公理に入れた理論もそうである（これはロビンソン算術とほとんど同じ理論になる）．後の 3.8 節において，この固有の公理の有限性が導く重要な結果を一つ紹介する．

PRA (primitive recursive arithmetic) と呼ばれる理論は，しばしば「ヒルベルトの有限の立場[2] を形式化した体系」として取り上げられるものである．PRA はすべての原始再帰的関数を関数記号としてもっている．これを簡単に説明すると，たとえば階乗関数 factorial はかけ算から原始再帰でつぎのように定義される．

$$\mathrm{factorial}(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0\text{ のとき}) \\ x\cdot\mathrm{factorial}(x-1) & (x > 0\text{ のとき}) \end{cases}$$

これに対して PRA には関数記号 factorial があり，factorial に関するつぎの公理をもっている．

$$\mathrm{factorial}(0) = \overline{1}$$
$$\forall x\Big(\mathrm{factorial}(\mathrm{S}(x)) = \mathrm{S}(x)\cdot\mathrm{factorial}(x)\Big)$$

同様に他のすべての原始再帰的関数の関数記号とそれに関する公理が体系の中にあるのが PRA である．この意味で PRA の論理式は PA の論理式よりも豊かになっている．一方 PRA では帰納法の公理

$$\forall\vec{y}\Big(\Big(\varphi(0,\vec{y}) \land \forall x(\varphi(x,\vec{y}) \to \varphi(\mathrm{S}(x),\vec{y}))\Big) \to \forall x\varphi(x,\vec{y})\Big)$$

が制限されている．この制限の方法はいくつかあるが，たとえば「$\varphi(x,\vec{y})$ は $\forall$ も $\exists$ も含まない論理式に限る」とする．

PRA は帰納法の制限のおかげで PA よりも本質的に弱い（証明できる論理式が少ない）理論になっている．言語，つまり論理式を構成する記号の点では PRA は PA を拡張したものになっているが，そのような言語の拡張は本質的ではないことを後の 5.1 節で説明する（なお，文献によっては PRA は $\forall$ と $\exists$ を言語に含まない体系として定義される場合もある）．

2) 本書第 III 部の「ヒルベルトのプログラム」の説明を参照されたい．

第3章

第一不完全性定理

前章までで準備が整ったのでこの章で第一不完全性定理を示す．この証明方法はいくつか知られているが，ここではゲーデル数，証明可能性述語，対角化定理を用意してから「この文は証明できない」という意味の自己言及文をつくる，というオーソドックスな方法によって第一不完全性定理を証明する．さらに関連して，理論の決定不可能性に関する重要な結果をいくつか示す．

3.1 第一不完全性定理の解釈

定義 3.1 理論 T がつぎの条件を満たすとき T は完全 (complete) であるという．

> 任意の文 φ について，$T \vdash \varphi$ か $T \vdash \neg\varphi$ のどちらかは成り立つ．
> つまり，どんな命題も T で証明か反証ができる．

完全な理論というのは，現在未解決の問題も含めてどんな主張に対してもその真偽の白黒を決着してくれるありがたい理論である．もしも PA が完全ならば話は簡単だ．しかし後で示されるように PA は不完全，つまり算術を展開するためにはあれだけの公理では不十分である．それでは PA にどのような公理を加えれば完全な理論になるのだろうか．そもそも完全な理論は存在するのだろうか．

完全な理論の存在はつぎの例が示している．自然数に関するすべての正しい主張（すなわち$\mathrm{N} \models \varphi$なるすべての文$\varphi$）を公理とする理論は完全である．しかし実際にこの理論で証明を書こうと思っても，「$\mathrm{N} \models \varphi$なるすべての文$\varphi$を公理とする」という情報だけでは具体的に公理として使っていいものといけないものとの判別がつかずに困ってしまう．つまり，このような公理設定は不適切であり，したがって「任意に文が与えられたとき，それが公理であるか否かがその形から簡単に判ること」が適切な公理設定の必要条件であるといってよい．ここで「簡単に判る」という条件は曖昧なので，これを1.1節で定義された「計算可能」という厳密な条件に置き換えてもよい（「簡単」ならば「計算可能」のはずだから）．つまり，公理の集合が計算可能であること，すなわち与えられた文が公理であるか否かを判定する機械的な手順が存在することが，理論が妥当であるための必要条件である．

もう一つ，理論が数学として妥当であるために当然要求される必要条件は無矛盾性である．矛盾する理論とは何でも証明できる理論のことであり，これは数学として意味がない．

ところがつぎが成り立つのである．

> **ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理**　PA にいくら公理を加えても，上記の二条件つまり公理集合の計算可能性と無矛盾性を満たしている限りは，どうやっても完全な理論になることはできない．

PA の公理は自然数の最も基本的な性質を表現しており，普通の数学理論には必ずこれらの公理が含まれていると考えてよい．つまり第一不完全性定理は，「すべての命題の真偽に決着をつける数学の理論は，存在しない」といっているのである（ただしこれは「数学のどんな理論に対しても，そこで証明も反証もできない命題が理論ごとに必ず存在する」であり，「ある特定の命題はどんな理論でも証明も反証もできない」とは異なることに注意されたい）．

3.2 ゲーデル数

ここで不完全性定理の証明の一つの重要なアイデアであるゲーデル数 (Gödel number) を導入する．ゲーデル数とは形式体系の「項」「論理式」「証明」などを自然数にコード化した数であり，これを用いることによって算術の理論に関するメタな議論を算術の理論の中で扱えるようになる，というのが不完全性定理の重要なポイントである．現実のコンピュータの動作原理では，プログラムを数値データ（2 進数）で表現してそれを計算対象として扱う（たとえばコンパイラというプログラムは，プログラムを計算対象として作動する）ことが重要であるが，この考えはまさに，「証明」をゲーデル数で表現してそれを体系内で証明対象として扱うことと同じである．その意味でも（第 1 章でも述べたが）ゲーデルの不完全性定理はその後のコンピュータの理論の先取りをしているのである．

PA のすべての項，論理式，証明に対して，それぞれ一意に自然数を割り当てる方法を定める．α が項や論理式や証明のとき α に割り当てられる自然数のことを α のゲーデル数と呼び，それを $\ulcorner\alpha\urcorner$ と表記する．ゲーデル数の具体的な定義は後で述べるとして，重要な性質をあげておく．

- 異なる項，論理式，証明はそれぞれ異なるゲーデル数をもつ．
- 与えられた項や論理式や証明からそのゲーデル数を計算できる．
- 与えられた自然数に対して，それが項や論理式や証明のゲーデル数になっているか否かの判定が計算可能であり，もしゲーデル数になっているなら，その項や論理式や証明を機械的に求めることができる．
- 論理式や項や証明に対するさまざまな操作が，ゲーデル数を用いて自然数上の計算可能関数（あるいは原始再帰的関数）として実現できる．たとえば「論理式 $\forall x\varphi(x)$ と項 t から論理式 $\varphi(t)$ を得る」ということに対しては，つぎの関数 f がこれを実現する関数である．

$$f(m,n) = \begin{cases} \ulcorner\varphi(t)\urcorner & (\text{ある論理式 } \forall x\varphi(x) \text{ とある項 } t \text{ について } m = \ulcorner\forall x\varphi(x)\urcorner,\ n = \ulcorner t\urcorner \text{ のとき}) \\ 0 & (m \text{ が } \forall x\varphi \text{ という形の論理式のゲーデル数でないとき，または } n \text{ が項のゲーデル数ではないとき}) \end{cases}$$

（ただし 0 はどんな論理式のゲーデル数でもないとする.）

それではゲーデル数を実際に定義しよう．まず 2 変数関数 dpair を

$$\mathrm{dpair}(m,n) = (m+n)(m+n+1) + 2m$$

と定義する．これは 1.5 節（図 1.5）に登場した関数 pair の 2 倍であり，（自然数 × 自然数）から偶数全体への全単射となる.

PA の項は，定数（0）と可算無限個存在する変数（$x, y, z, \ldots$）から，関数記号（S, +, ·）によって再帰的に定義されている．そこでその定義に従って再帰的に項のゲーデル数を定義する．まず，定数と変数のゲーデル数は奇数を順に割り当てる.

$$\ulcorner 0\urcorner = 1, \ulcorner \mathrm{v}_0\urcorner = 3, \ulcorner \mathrm{v}_1\urcorner = 5, \ulcorner \mathrm{v}_2\urcorner = 7, \cdots$$

関数記号 S, +, · で構成される項に対しては，つぎのように再帰的に定義する（以下では t, u は任意の項である）.

$$\ulcorner \mathrm{S}(t)\urcorner = \mathrm{dpair}(0, \ulcorner t\urcorner)$$
$$\ulcorner (t+u)\urcorner = \mathrm{dpair}(1, \mathrm{dpair}(\ulcorner t\urcorner, \ulcorner u\urcorner))$$
$$\ulcorner (t\cdot u)\urcorner = \mathrm{dpair}(2, \mathrm{dpair}(\ulcorner t\urcorner, \ulcorner u\urcorner))$$

同様に論理式のゲーデル数も再帰的に定義する（以下では t, u は任意の項，φ, ψ は任意の論理式，x は任意の変数である）.

$$\ulcorner (t=u)\urcorner = \mathrm{dpair}(3, \mathrm{dpair}(\ulcorner t\urcorner, \ulcorner u\urcorner))$$
$$\ulcorner (t<u)\urcorner = \mathrm{dpair}(4, \mathrm{dpair}(\ulcorner t\urcorner, \ulcorner u\urcorner))$$
$$\ulcorner \neg\varphi\urcorner = \mathrm{dpair}(5, \ulcorner \varphi\urcorner)$$

$$\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner = \mathrm{dpair}(6, \mathrm{dpair}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner))$$
$$\ulcorner\varphi\vee\psi\urcorner = \mathrm{dpair}(7, \mathrm{dpair}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner))$$
$$\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner = \mathrm{dpair}(8, \mathrm{dpair}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner))$$
$$\ulcorner\varphi\leftrightarrow\psi\urcorner = \mathrm{dpair}(9, \mathrm{dpair}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner))$$
$$\ulcorner\forall x\varphi\urcorner = \mathrm{dpair}(10, \mathrm{dpair}(\ulcorner x\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner))$$
$$\ulcorner\exists x\varphi\urcorner = \mathrm{dpair}(11, \mathrm{dpair}(\ulcorner x\urcorner, \ulcorner\varphi\urcorner))$$

PA（および一般の理論 T）の証明は論理式の列なので，有限列のコード化の技法（1.5 節）を使って証明のゲーデル数を定義する．証明 $\mathcal{P}$ が論理式の列

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

であるとき，

$$\mathrm{decode}(e, 0) = \ulcorner\varphi_0\urcorner,$$
$$\mathrm{decode}(e, 1) = \ulcorner\varphi_1\urcorner,$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{decode}(e, n) = \ulcorner\varphi_n\urcorner$$

なる e を使って（このような e の存在が定理 1.8 で示されていた），

$$\ulcorner\mathcal{P}\urcorner = \mathrm{pair}(n, e)$$

とする．

3.3 第一不完全性定理の正確な内容

定義 3.2 つぎの (1)(2) を同時に満たす論理式 φ が存在するとき理論 T は矛盾する (inconsistent) といい，そのような φ は存在しないとき T は無矛盾である (consistent) という．

(1) $T \vdash \varphi$. (2) $T \vdash \neg\varphi$.

定義 3.3　つぎの (1)(2) を同時に満たす論理式 $\varphi(x)$ が存在するとき理論 T は ω 矛盾する (ω-inconsistent) といい（ω はギリシャ文字の「オメガ」である），そのような $\varphi(x)$ は存在しないとき T は ω 無矛盾である (ω-consistent) という．

(1) $T \vdash \exists x\varphi(x)$．(2) すべての自然数 n に対して $T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$．

ところで「T が矛盾する」ということは，「すべての論理式 φ について $T \vdash \varphi$」「$T \vdash \perp$」という 2 条件のいずれとも同値になることが，論理体系の性質として知られている．ただし $\perp$ は偽を表す文で $\neg\perp$ が証明できるもの，たとえば $\perp \equiv \neg(0 = 0)$ である．矛盾する理論というのは，このように何でも証明できる意味のない理論である．一方 ω 矛盾する理論は「$\varphi(x)$ を満たす x がある」といいながら同時に「$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \ldots$ は成り立たない」といっているのであり，標準モデル N の解釈が通用しない非標準的な理論である．矛盾と ω 矛盾との関係はつぎのようになっている．「T が矛盾するならば T は ω 矛盾する（したがって，T が ω 無矛盾ならば T は無矛盾である)」ということはただちにいえる．しかしこの逆は必ずしも成り立たない．実際，無矛盾ではあるが ω 矛盾している理論が存在する（3.6 節の注意 3.12(2))．

定義 3.4　理論 T に対して，自然数上の 1 変数述語 $\mathbf{Axiom}_T$ をつぎで定義する．

$$\mathbf{Axiom}_T(n) \iff n \text{ は } T \text{ の固有の公理のゲーデル数である．}$$

そして以下の 2 条件が成り立つとき，T は PA の計算可能拡大であるという．

(a) T の公理の中には PA のすべての公理が含まれる．

(b) 述語 $\mathbf{Axiom}_T$ は計算可能である．

また以下の 2 条件が成り立つとき，T は PA の RE 拡大であるという．

(a) T の公理の中には PA のすべての公理が含まれる．

(c) 述語 $\mathbf{Axiom}_T$ は RE である．

なお，条件 (a) が成り立つ T のことを PA の拡大と呼ぶ．

以上の言葉を使って第一不完全性定理を正確に述べることができる．まずゲーデルの第一不完全性定理は，「理論 T が PA の計算可能拡大で ω 無矛盾ならば，T は不完全」であり，これが 3.6 節で証明される．さらにこの定理の前提条件である「ω 無矛盾」を単なる「無矛盾」に，「計算可能拡大」を「RE 拡大」に，それぞれ弱めることができる．すなわち第一不完全性定理は「理論 T が PA の RE 拡大で無矛盾ならば，T は不完全」と拡張されるが，これは 3.7 節で証明される．

3.4 証明可能性述語

理論 T に対して，自然数上の 2 変数述語 $\mathbf{Prov}_T$ をつぎで定義する．

$\mathbf{Prov}_T(n,m) \iff m$ は論理式（φ とする）のゲーデル数であって，n は「T における φ の証明」のゲーデル数である（簡単にいえば「n が m を証明する」）．

述語 $\mathbf{Axiom}_T$ が計算可能ならば $\mathbf{Prov}_T$ も計算可能になる，ということが，定理 2.10(1) の証明中の議論からいえる．さらに同定理の (2) の結果から，$\mathbf{Prov}_T$ が計算可能ならばつぎの条件を満たす Σ_1 論理式 $\mathrm{Prov}_T(y,x)$ の存在がいえる．任意の自然数 n,m について

(1) $\mathbf{Prov}_T(n,m)$ が成り立つときには $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prov}_T(\overline{n},\overline{m})$．

(2) $\mathbf{Prov}_T(n,m)$ が成り立たないときには $\mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Prov}_T(\overline{n},\overline{m})$．

この $\mathrm{Prov}_T(y,x)$ によってつくられた Σ_1 論理式

$$\exists y \mathrm{Prov}_T(y,x)$$

のことを T の証明可能性述語 (provability predicate) と呼び，これを $\mathrm{Pr}_T(x)$ と表記する．

以上をまとめてつぎが成り立つ.

定理 3.5 理論 T に関して，述語 $\mathbf{Axiom}_T$ が計算可能ならば T の証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が存在する.

さて，証明可能性述語によってつくられた文 $\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ の意味は「T における φ の証明がある」（すなわち $T\vdash\varphi$）であり，正確には

$$T\vdash\varphi \Longleftrightarrow \mathrm{N}\models\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

が任意の φ に対して成り立つ．つぎの定理は，この右辺の「$\mathrm{N}\models$」を「$T\vdash$」にした命題がどんな条件のもとで成り立つかをいっている.

定理 3.6 理論 T が PA の拡大で $\mathrm{Pr}_T(x)$ が T の証明可能性述語ならばつぎが成り立つ.

(a) $T\vdash\varphi$ ならば $\mathrm{PA}\vdash\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$，したがって $T\vdash\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ である.

(b) T が ω 無矛盾で $T\vdash\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ ならば $T\vdash\varphi$ である.

証明 (a) $T\vdash\varphi$ と仮定する．すなわちある n に対して $\mathbf{Prov}_T(n,\ulcorner\varphi\urcorner)$ が成り立つので（n は φ の証明のゲーデル数），先ほどの (1) から $\mathrm{PA}\vdash\mathrm{Prov}_T(\overline{n},\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ となり，これから $\mathrm{PA}\vdash\exists y\mathrm{Prov}_T(y,\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ が得られる（$\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ は正しい Σ_1 文になるので，Σ_1 完全性定理（定理 2.5）を用いてもよい）.

(b) $T\nvdash\varphi$ と仮定すると，$\mathbf{Prov}_T(n,\ulcorner\varphi\urcorner)$ はどんな自然数 n に対しても成り立たない．したがって先ほどの (2) によって，すべての n に対して $T\vdash\neg\mathrm{Prov}_T(\overline{n},\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ が成り立ち，$T\vdash\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ と仮定すると T が ω 矛盾することになる. ■

3.5 対角化定理

ここでは，自己言及的な論理式を構成するための強力な道具である対角化定理を証明する.

定理 3.7（対角化定理）　$\varphi(x)$ が x 以外の自由変数を含まない論理式ならば，つぎの条件を満たす文 ψ が存在する．

$$\mathrm{PA} \vdash \ \psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}).$$

証明　x 以外の自由変数を含まない論理式すべてを，そのゲーデル数の小さい順に並べて

$$A_0(x),\ A_1(x),\ A_2(x), \cdots$$

と呼ぶことにする．そして自然数上の関数 f を

$$f(n) = \ulcorner A_n(\overline{n}) \urcorner$$

（すなわち，n 番目の論理式に数項 $\overline{n}$ を代入して得られる文のゲーデル数）と定義する．ゲーデル数の性質からこの f は計算可能関数であり，計算可能関数の表現定理（定理 2.12）によって，

(†) $\mathrm{PA} \vdash \forall y(y = \overline{f(n)} \to \chi(\overline{n}, y))$

(‡) $\mathrm{PA} \vdash \forall y(\neg(y = \overline{f(n)}) \to \neg\chi(\overline{n}, y))$

が任意の自然数 n について成り立つような論理式 $\chi(x, y)$ で，x, y 以外の自由変数をもたないものが存在する．ここで論理式 $\exists y(\chi(x, y) \wedge \varphi(y))$ を考える（この論理式は $\varphi(f(x))$ を意味している）．これは x 以外の自由変数をもたないので

$$A_k(x) \ \equiv \ \exists y(\chi(x, y) \wedge \varphi(y))$$

となる自然数 k が存在するはずである．そこでこの k を使って文 ψ を

$$\psi \ \equiv \ \exists y(\chi(\overline{k}, y) \wedge \varphi(y))$$

（この文は $\varphi(f(\overline{k}))$ を意味している）と定義する．これが求める ψ になっていることを示すために，つぎの二つを示す．

(1) $\mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \psi.$

(2) $\mathrm{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \neg\psi$.

まず (†) と $f(k) = \ulcorner\psi\urcorner$ であること（なぜなら $\psi \equiv A_k(\overline{k})$ である）から

$$\mathrm{PA} \vdash \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to (\chi(\overline{k}, \overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \wedge \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}))$$

がいえるので (1) が示される．一方 (2) の証明には

$$\mathrm{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \forall y(\neg\chi(\overline{k}, y) \vee \neg\varphi(y))$$

を示せばよいが，これは等号に関する推論による

$$\mathrm{PA} \vdash \neg\varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \forall y(\neg(y = \overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \vee \neg\varphi(y))$$

と (‡) と $f(k) = \ulcorner\psi\urcorner$ から示される． ■

なお $\mathrm{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$ をみると ψ は $\varphi(x)$ の「不動点」にみえるので，この定理は不動点定理と呼ばれることもある．

3.6 ゲーデルの第一不完全性定理

定義 3.8 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が理論 T の証明可能性述語で，文 G が

$$T \vdash G \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G\urcorner})$$

を満たすとき，G は T のゲーデル文 (Gödel sentence) であるという．

ゲーデル文は「自分自身は証明できない」という自己言及的な意味をもつ文である（「私は嘘をついている」というパラドクスと状況が似ている）．

定理 3.9（ゲーデルの第一不完全性定理の実質） 理論 T が PA の拡大で，G が T のゲーデル文ならば，つぎが成り立つ．

(a) T が無矛盾ならば $T \nvdash G$ である．

(b) T が ω 無矛盾ならば $T \nvdash \neg G$ である．

したがって，T が ω 無矛盾ならば T は不完全である．

証明 (a) 後の都合（第二不完全性定理の証明）のために，やや冗長な証明をステップごとに番号をつけて行う．

(1) $T \vdash G$ を仮定すると，定理 3.6(a) によって $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ である．

(2) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ ならばゲーデル文の定義を用いて $T \vdash \neg G$ になる．

(3) 以上の (1) と (2) より，$T \vdash G$ を仮定すると $T \vdash \neg G$ である．

(4) したがって，$T \vdash G$ を仮定すると $T \vdash G$ かつ $T \vdash \neg G$，すなわち T は矛盾する．

(5) この (4) の対偶により，T が無矛盾ならば $T \nvdash G$ となる．

(b) $T \vdash \neg G$ を仮定するとゲーデル文の定義を用いて $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\ulcorner G \urcorner)$ となる．すると定理 3.6(b) によって $T \vdash G$ になるが，これは (a) に反する．したがって $T \nvdash \neg G$ である． ■

ところで，証明可能性述語の存在に関する定理（定理 3.5）と対角化定理（定理 3.7）によって，ただちにつぎがいえる．

定理 3.10 理論 T が PA の計算可能拡大ならば，T のゲーデル文が存在する．

以上の定理 3.9，3.10 をまとめて，つぎが得られる．

定理 3.11（ゲーデルの第一不完全性定理） PA の ω 無矛盾な計算可能拡大は，どんなものでも不完全である．

注意 3.12 (1) T が PA の無矛盾な計算可能拡大で，G が対角化定理によってつくられた T のゲーデル文ならば，$T \nvdash G$ かつ $\mathrm{N} \models G$ となる．すなわち，ゲーデル文 G は「正しいけれども T では証明できない Π_1 文」になっている．(2) T は PA の無矛盾な計算可能拡大とする．T にゲーデル文の否定 $\neg G$

を公理として追加した理論を T' と呼ぶと，これは無矛盾だが ω 矛盾する理論になる．なぜなら，$T \nvdash G$ であることから T' は無矛盾であり（論理体系の性質（演繹定理）によって $(T' \vdash \bot) \Rightarrow (T \vdash G)$ が成り立つ），一方，$T' \vdash \exists y \mathrm{Prov}_T(y, \overline{\ulcorner G \urcorner})$ かつすべての自然数 n について $T' \vdash \neg \mathrm{Prov}_T(\overline{n}, \overline{\ulcorner G \urcorner})$ となることから，T' は ω 矛盾する．

3.7 第一不完全性定理の拡張

この節では，第一不完全性定理のロッサーによる拡張とクレイグの手法による拡張を説明する．

ゲーデルの第一不完全性定理は，証明可能性述語の性質

(a) $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$,

(b) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ ならば $T \vdash \varphi$

（φ は任意）とゲーデル文 G の定義

(c) $T \vdash \ G \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$

を使って示されたが，(b) を示すために T が ω 無矛盾であるという条件が必要であった．これに対してロッサーは $\mathrm{Pr}_T(x)$ とは少し異なる論理式 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(x)$（これを「ロッサーの証明可能性述語」と呼ぶ）を定義して，それが

(d) $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$,

(e) $T \vdash \neg\varphi$ ならば $T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$

（φ は任意）を満たすことを示した．この際 T が ω 無矛盾である必要はない．そして，

(f) $T \vdash \ R \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\overline{\ulcorner R \urcorner})$

なる文 R（これを T のロッサー文 (Rosser sentence) と呼ぶ）をとることによって，つぎがいえる．

定理 3.13（ロッサーの不完全性定理の実質） 理論 T が無矛盾で，$\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(x)$ が上の (d)(e) を満たし，R が T のロッサー文ならば，$T \nvdash R$ かつ $T \nvdash \neg R$ である．

証明 $T \vdash R$ と仮定すると (d) と (f) からそれぞれ $T \vdash \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\overline{\ulcorner R \urcorner})$, $T \vdash \neg\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\overline{\ulcorner R \urcorner})$ で T が矛盾してしまう．$T \vdash \neg R$ と仮定すると同様に (e) と (f) から T が矛盾することが導かれる． ■

ロッサーの証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(x)$ はつぎのように定義される．理論 T は PA の計算可能拡大であるとする．3.4 節で定義された $\mathrm{Prov}_T(y, x)$ は，自然数上の計算可能述語 $\mathbf{Prov}_T(n, m)$ を表現した Σ_1 論理式であった．同様に，自然数上の述語

$\mathbf{Dispr}_T(n, m) \iff m$ は論理式（φ とする）のゲーデル数であって，n は「T における $\neg\varphi$ の証明」のゲーデル数である

は計算可能であり，これを表現する Π_1 論理式 $\mathrm{Dispr}_T(y, x)$ の存在が定理 2.10 からいえる（disprove: 反証する）．そして

$$\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(x) \;\equiv\; \exists y\Big(\mathrm{Prov}_T(y, x) \wedge (\forall z < y)\neg\mathrm{Dispr}_T(z, x)\Big)$$

とする．これは Σ_1 論理式である．文 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ の意味は「φ の証明 y があって，y よりゲーデル数が小さなものはどれも $\neg\varphi$ の証明ではない」であり，$\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ よりも少し強いことを主張している．

定理 3.14 理論 T が PA の計算可能拡大ならば，論理式 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(x)$ は上述の (d)(e) を満たす．

証明 もし T が矛盾するならば T でどんな論理式も証明できるので (d)(e) が成り立つ．そこで以下では T は無矛盾とする．$T \vdash \varphi$ であって T が無矛盾

ならば $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ は正しい Σ_1 文になるので，Σ_1 完全性定理（定理 2.5）によって (d) が示される．一方 $T \vdash \neg\varphi$ のときは，T における $\neg\varphi$ の証明があるのでその証明のゲーデル数を n とする．すると $\mathbf{Dispr}_T(n, \ulcorner\varphi\urcorner)$ が成り立ち，さらに T の無矛盾性から $\mathbf{Prov}_T(i, \ulcorner\varphi\urcorner)$ はどんな i についても成り立たない．したがって

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Dispr}_T(\overline{n}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}),$$

$$n \text{ 以下のすべての } i \text{ に対して } \mathrm{PA} \vdash \neg\mathrm{Prov}_T(\overline{i}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

が成り立ち，定理 2.4(2) と同様にして

$$\mathrm{PA} \vdash \forall y\Big(\neg\mathrm{Prov}_T(y, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \vee (\exists z < y)\mathrm{Dispr}_T(z, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\Big)$$

となって (e) が示される． ■

以上の定理 3.13, 3.14 と対角化定理（定理 3.7）からつぎがいえる．

定理 3.15（ゲーデル・ロッサーの不完全性定理） PA の無矛盾な計算可能拡大は，どんなものでも不完全である．

つぎの定理は「クレイグの手法」として知られているものである．

定理 3.16 理論 T の固有の公理のゲーデル数の集合 $\mathbf{Axiom}_T$ が RE であるならば，T と同等な理論（すなわち証明できる論理式が同じ）T' で，$\mathbf{Axiom}_{T'}$ が計算可能であるものが存在する．

証明 RE の定義（定理 1.2(2)）により

$$\mathbf{Axiom}_T(n) \Longleftrightarrow \text{ある } m \text{ が存在して } B(n, m)$$

となる計算可能 2 変数述語 B が存在する．この B を使って記述されるつぎの条件 (†) を満たす論理式 φ をすべて集めて，それを T' の固有の公理集合とする．

(†) ある自然数 m と論理式 ψ が存在して，$\varphi \equiv \overbrace{\psi\wedge\psi\wedge\cdots\wedge\psi}^{m+1\text{ 個}}$ かつ $B(\ulcorner\psi\urcorner, m)$.

二つの理論 T, T' が同等であることは，ψ と $\psi\wedge\psi\wedge\cdots\wedge\psi$ との同値性などからいえる．$\mathbf{Axiom}_{T'}$ の計算可能性は，任意に与えられた φ を $\overbrace{\psi\wedge\psi\wedge\cdots\wedge\psi}^{m+1}$ という形に分解して $B(\ulcorner\psi\urcorner, m)$ の判定をすることが計算可能であることからいえる． ■

この定理と先ほどのゲーデル・ロッサーの不完全性定理（定理 3.15）によって，第一不完全性定理はつぎの形まで拡張される．

定理 3.17 PA の無矛盾な RE 拡大は，どんなものでも不完全である．

3.8 決定不能性に関するいくつかの結果

この節では，第一不完全性定理に関連して示される，算術の重要な性質をいくつか紹介する．

定義 3.18 $\mathrm{N} \models \varphi$ なるすべての文 φ を固有の公理としてもち，それ以外は公理ではない理論を TA (true arithmetic) と呼ぶ．

定理 3.19（自然数上での真偽判別不能性定理） 述語 $\mathbf{Axiom}_{\mathrm{TA}}$ は計算不可能である．つまり，自然数に関する文を任意に与えるとその真偽（標準モデル N における真偽）を判定してくれるようなアルゴリズムは，存在しない．

証明 理論 TA は，定義から明らかに PA の拡大であり，ω 無矛盾かつ完全である．したがって第一不完全性定理により TA の公理集合は計算不可能である． ■

補題 3.20 理論 T は PA の無矛盾な拡大であるとする．このとき，つぎの (1)(2) を任意の φ に対して成り立たせる論理式 $A(x)$（ただし x 以外の自由変数を含まない）は存在しない．

(1) $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash A(\ulcorner\varphi\urcorner)$.

(2) $T \nvdash \varphi$ ならば $T \vdash \neg A(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

証明　このような $A(x)$ があると仮定すると対角化定理（定理 3.7）によって

(3) $T \vdash \ \varphi \leftrightarrow \neg A(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$

なる文 φ が得られるが，無矛盾な T はこの φ に対して (1)(2)(3) を同時に成り立たせることはできない. ■

定理 3.21（タルスキの真理定義不可能性定理）　つぎの条件を満たす論理式 $A(x)$（ただし x 以外の自由変数を含まない）は存在しない.

$$\text{任意の文}\,\varphi\,\text{に対して}\ \mathrm{N} \models \ \varphi \leftrightarrow A(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}).$$

証明　このような $A(x)$ は，$T = \mathrm{TA}$ としたときの補題 3.20 の条件を満たす論理式になる. ■

定理 3.21 の条件を満たす論理式 $A(x)$ は（もしあったとしたら）「任意の文の真偽を記述した論理式」もしくは「任意の文の真偽を定義する論理式」であるといえる．したがってこの定理は「1 階算術の文の標準モデルにおける真偽は，1 階算術の論理式では定義できない」ということを示している.

定理 3.22（PA の本質的決定不能性定理）　PA のどんな無矛盾な拡大も決定不能である．すなわち，理論 T が PA の拡大で無矛盾であるとき，自然数上の述語 $\mathbf{Pr}_T$ を

$$\mathbf{Pr}_T(n) \iff n\ \text{はある論理式}\,\varphi\,\text{のゲーデル数で，かつ}\ T \vdash \varphi$$

と定義すると，$\mathbf{Pr}_T$ は計算不可能である.

証明　$\mathbf{Pr}_T$ が計算可能であると仮定すると，計算可能述語の表現定理（定理 2.10）によって補題 3.20 の条件を満たす論理式の存在がいえてしまう. ■

2.6 節で述べたように，固有の公理が有限個のロビンソン算術のような理論を PA の代わりに用いても，ここまでの議論がすべて成り立つ．とくに定理 3.22 が，T をそのような理論としたときにも成り立つ．以下ではこの T の固有の公理の有限性が導く重要な結果を一つ紹介する.

定理 3.23（述語論理の決定不能性定理）　任意に与えられた論理式の「恒真性判定」および「1 階述語論理（固有の公理のない理論）での証明可能性判定」は，ともに計算不可能である．

証明　「恒真性」と「1 階述語論理での証明可能性」は同値である（ゲーデルの完全性定理）．そこで後者の判定が計算不可能であることを示す．いま，T を上述の理論として，T の固有の公理すべてを $\wedge$ でつないで一つにまとめた文を T_{axioms} と名付ける（固有の公理が有限個だからできる）．すると論理体系の性質（演繹定理）により，任意の φ に対してつぎの 2 条件件は同値になる．

(†) $T \vdash \varphi$.

(‡) 論理式 $(T_{\mathrm{axioms}} \to \varphi)$ が 1 階述語論理で証明可能.

仮に 1 階述語論理での証明可能性判定が計算可能ならば，与えられた φ に対する (‡) の判定が計算可能になるが，それは (†) の判定の計算不可能性（定理 3.22 をこの T について示したもの）に反する．■

1 階述語論理での証明可能性判定が RE であることはすぐにわかるので，定理 3.23 と合わせて，1.4 節の最後にあげた「Valid が RE かつ計算不可能であること」が示される．

第4章

第二不完全性定理

第二不完全性定理は第一不完全性定理の証明を算術で形式化すれば導かれる．この章では，この「形式化」を導出可能性条件という性質を用いてわかりやすく実演して，第二不完全性定理を証明する．

4.1 第二不完全性定理の意義

第二不完全性定理の内容と意義について簡単に説明する．

理論 T が無矛盾 (consistent) であるとは $T \nvdash \bot$ ということであるが (3.3 節参照)，これを意味する T の文 $\mathrm{Con}(T)$ をつぎのように定める．

定義 4.1 $\mathrm{Con}(T) \equiv \neg \mathrm{Pr}_T(\ulcorner \bot \urcorner)$．ただし証明可能性述語 Pr_T に関して注意が必要であり，次節および 5.3 節でくわしく述べる．

さて，つぎの定理がゲーデルの第二不完全性定理である．

> 理論 T が PA の RE 拡大で無矛盾ならば，$T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ である．
> すなわち，無矛盾な T は自分自身の無矛盾性を証明できない．

したがって，T が無矛盾ならば $\mathrm{Con}(T)$ は正しいけれども T では証明できない Π_1 文になる．

ところで「正しいけれども T では証明できない Π_1 文」といえば，ゲーデ

ル文がそうであった（3.6 節の注意 3.12(1)）．しかしゲーデル文は対角化定理によって人工的につくられた論理式，という感があるのに対して，$\mathrm{Con}(T)$ は理論の無矛盾性を表現した具体的な意味をもつ論理式である点が，第二不完全性定理の重要なところである．「数学の理論の無矛盾性を証明せよ」という問題に対して，これは一つの普遍的な否定解になっているのである[1)]．

しかし第二不完全性定理の意義はけっして否定的なものではない．この定理が明らかにしたことは，無矛盾性が理論の強さを分類する指標になるということである．つまり，二つの理論の強さが異なることを示す手段として，「『片方がもう片方の無矛盾性を証明する』ことを示す」という方法が確立されたのである．

また，第二不完全性定理のゲーデルによる証明方法も重要である．第二不完全性定理は第一不完全性定理の証明を T の中で形式化して行うことによって導かれるが，この手法——メタな証明を形式化して行うこと——は，この分野の研究における重要な証明手法の一つとなったのである．

4.2 導出可能性条件

第一不完全性定理を示すための証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x) \equiv \exists y \mathrm{Prov}_T(y, x)$ は，Prov_T が関係 $\mathbf{Prov}_T$ を表現した論理式であれば何でもよかった．しかしこの条件だけでは一般に第二不完全性定理は成り立たない．たとえばロッサーの証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(x)$ を考えると，定理 3.14 により $T \vdash \neg \mathrm{Pr}_T^{\mathrm{Rosser}}(\ulcorner \perp \urcorner)$ となり，これを「T の無矛盾性が T で証明された」と解釈することも可能である．このため第二不完全性定理のための証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ は適切に定義される必要がある．その定義は次章にまわすことにして，この節では証明可能性述語について今後必要となる性質をあげておく．

定理 4.2 理論 T が PA の RE 拡大ならば，Σ_1 論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$（ただし x 以外の自由変数は現れない）が存在して，任意の φ に対して

---

1) 本書の「序」や第 III 部の「ヒルベルトのプログラム」の説明も参照されたい．

$$T \vdash \varphi \iff \mathrm{N} \models \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

(証明可能性述語としての当然の条件）が成り立ち，さらにつぎの 3 条件が成り立つ．

(D1) $T \vdash \varphi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

(D2) $T \vdash \left(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner})\right) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

(D3) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T\left(\overline{\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner}\right)$.

(φ, ψ は任意の論理式.)

証明　$\mathrm{Pr}_T(x)$ の定義とそれが証明可能性述語としての当然の条件を満たすことは定理 5.3 で示される．条件 **D1** は定理 3.6(a) と同じであり，Σ_1 完全性定理（定理 2.5）からいえる．条件 **D2** はつぎのように示される．T において φ と $\varphi\to\psi$ が証明できているとき，ψ も証明できる（1 階述語論理の推論による）．この ψ の証明のゲーデル数を，「φ の証明のゲーデル数 x」と「$\varphi\to\psi$ の証明のゲーデル数 y」と「ψ のゲーデル数 k」とを用いて $g(x, y, k)$ というように項の形で表現できてつぎが成り立てば，これから **D2** が得られる．

$$T \vdash \forall x \forall y \Big((\mathrm{Prov}_T(x, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \wedge \mathrm{Prov}_T(y, \overline{\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner})) \\ \to \mathrm{Prov}_T(g(x, y, \overline{\ulcorner\psi\urcorner}), \overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \Big)$$

この詳細は定理 5.5 で示される．条件 **D3** は，**D1** の内容を表現した論理式の証明可能性である．**D1** の証明には Σ_1 完全性定理が使われたが，ここでつぎの「形式化された Σ_1 完全性定理」が成り立つ．

$$\text{任意の } \Sigma_1 \text{ 文 } \sigma \text{ に対して，} \mathrm{PA} \vdash \sigma \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}).$$

この詳細は定理 5.6 で示される．$\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$ は Σ_1 文なので，これを σ に当てはめて

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}\left(\overline{\ulcorner\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})\urcorner}\right)$$

となるが，一方

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$$

が任意の ψ に対して成り立つので（定理 5.4），これらから **D3** が得られる．

■

この **D1**，**D2**，**D3** は，レーブが与えた導出可能性条件 (derivability conditions) と呼ばれるものである．これ以降，証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ といったらこの定理 4.2 のものとする．また，T の無矛盾性を表す文 $\mathrm{Con}(T)$ はそのような証明可能性述語からつくられるものとする．

4.3　第二不完全性定理の証明

導出可能性条件を使って第二不完全性定理を証明する．

補題 4.3　理論 T が PA の RE 拡大ならば，つぎが成り立つ．

(1) $T \vdash \varphi \to \psi$ ならば $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$.

(2) $T \vdash \left(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})\right) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner})$.

証明　(1) $T \vdash \varphi \to \psi$ を仮定すると，導出可能性条件 **D1** より $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner})$ となり，導出可能性条件 **D2** などによって $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner})$ を得る．

(2) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$ は 1 階述語論理で証明できるので，(1) によって

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\to(\varphi\wedge\psi)\urcorner})$$

となる．一方 **D2** より

$$T \vdash (\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\to(\varphi\wedge\psi)\urcorner})) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\wedge\psi\urcorner})$$

なので，これらから (2) は導かれる．■

定理 4.4（ゲーデルの第二不完全性定理）　理論 T が PA の RE 拡大で無矛盾ならば $T \nvdash \mathrm{Con}(T)$ である．

証明 G を T のゲーデル文，すなわち

$$T \vdash\ G \leftrightarrow \neg \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$$

を満たすとする（このような G の存在は対角化定理（定理 3.7）で保証される）．まず定理 3.9(a)（すなわち第一不完全性定理の前半）を表す論理式

$$\mathrm{Con}(T) \to \neg \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$$

が T で証明できることを示す（以下の証明を定理 3.9(a) の証明と見比べてみよ）．

(1) 導出可能性条件 **D3** より

$$T \vdash\ \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \urcorner}).$$

(2) G はゲーデル文なので

$$T \vdash\ \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \neg G$$

であり，補題 4.3(1) により

$$T \vdash\ \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg G \urcorner}).$$

(3) 以上の (1) と (2) より

$$T \vdash\ \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg G \urcorner}).$$

(4) したがって

$$T \vdash\ \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \Big(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \land \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \neg G \urcorner})\Big)$$

であるが，一方 $T \vdash (G \land \neg G) \to \bot$ なので，これらと補題 4.3 の (1)(2) によって

$$T \vdash\ \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \bot \urcorner}).$$

(5) したがって，Con(T) の定義と合わせて

$$T \vdash \ \mathrm{Con}(T) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner}).$$

以上が第一不完全性定理の前半の証明を形式化して T の中で行ったものである．ところで，第一不完全性定理の前半

$$T \text{ が無矛盾ならば } T \nvdash G$$

そのものも，導出可能性条件 **D1** を用いて 3.6 節での証明とまったく同じ方法で示すことができる．これとゲーデル文の定義（$T \vdash G \leftrightarrow \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner G \urcorner})$）と (5) とを組み合わせて，

$$T \text{ が無矛盾ならば } T \nvdash \mathrm{Con}(T)$$

が得られる． ■

4.4 レーブの定理

第二不完全性定理に関連して，証明可能性述語のいくつかの性質を示す．

定理 4.5 理論 T が PA の RE 拡大で無矛盾ならば，どんな論理式 φ に対しても $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ である（第二不完全性定理はとくに φ が $\bot$ の場合であった）．

証明 $T \vdash \bot \to \varphi$ であるので，これに補題 4.3(1) を適用して同値変形した結果の

(†) $T \vdash \ \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \bot \urcorner})$

と第二不完全性定理（$T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \bot \urcorner})$）から $T \nvdash \neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$ がいえる． ■

定理 4.6 理論 T が PA の RE 拡大ならば，T のゲーデル文 G は T 上で Con(T) と同等，すなわち $T \vdash G \leftrightarrow \mathrm{Con}(T)$ である．

証明　定理 4.5 の証明中の (†) とゲーデル文の定義から $T \vdash G \to \mathrm{Con}(T)$ がいえる．一方，第二不完全性定理（定理 4.4）の証明中の (5) とゲーデル文の定義から $T \vdash \mathrm{Con}(T) \to G$ がいえる． ■

定理 4.7（レーブの定理）　理論 T が PA の RE 拡大ならば，任意の文 φ に対して以下の 2 条件は同値である．

(a) $T \vdash \varphi$.

(b) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \to \varphi$.

証明　(a) ⇒ (b) は明らか．以下では (b) を仮定して (a) を導く．対角化定理（定理 3.7）によって，

(1) $T \vdash \psi \leftrightarrow (\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \varphi)$

を満たす文 ψ を得ると，この片向き（$\psi \to (\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \varphi)$）と補題 4.3(1)，そして導出可能性条件 **D2** によって

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \left(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})\right)$$

となる．するとこれから導出可能性条件 **D3** などによって

$$T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner})$$

となるので，(b) によって

(2) $T \vdash \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner}) \to \varphi$

を得る．すると (1) と (2) から $T \vdash \psi$ となって，これに導出可能性条件 **D1** を適用して (2) と合わせると (a) が導かれる． ■

第5章
証明可能性述語の詳細

前章では証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ の直接の定義は与えずにそれがもつ性質（導出可能性条件）だけを使った議論を行ったが，本章では論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ の定義を与え導出可能性条件の証明などの詳細な議論を行う．

5.1 関数記号の追加

与えられた論理式 $F(\vec{x}, y)$ に対して，

$$\forall\vec{x}\Big((\exists yF(\vec{x},y)) \land \forall y\forall y'\Big((F(\vec{x},y)\land F(\vec{x},y)) \to (y=y')\Big)\Big)$$

のことを $\forall\vec{x}\exists!yF(\vec{x},y)$ と表記する．この論理式は，$F(\vec{x},y)$ を満たす y が $\vec{x}$ ごとに一意に存在することを意味している．もしもこの論理式が正しければ，「$\vec{x}$（$=x_1,\ldots,x_k$）に対して $F(\vec{x},y)$ を満たす y を返す」という k 変数関数が定義できる（$F(\vec{x},y)$ をこの関数のグラフの論理式と呼ぶ）．以下ではそのような関数記号を理論に追加することについて説明する．

いま，理論 T に対して新しい k 変数関数記号 f と，公理 $\forall\vec{x}F(\vec{x},f(\vec{x}))$ を加えた理論を $T^\sharp$ と呼ぶ．また，新しい関数記号 f を含んだ論理式 φ から意味を変えないように記号 f を消去して得られる論理式を $\varphi^\natural$ とする（この消去方法は後の例から類推されたい）．するとつぎが成り立つ．

定理 5.1 $T\vdash\forall\vec{x}\exists!yF(\vec{x},y)$ であるならば，任意の論理式 φ に対して

$$T^\sharp \vdash \varphi \iff T \vdash \varphi^\natural$$

である．

この定理の証明は省略して[1]，使い方の例を説明する．論理式 $F(x,y)$ について $\mathrm{PA} \vdash \forall x \exists ! y F(x,y)$ であるとする．このとき，PA に新しい関数記号 f と公理 $\forall x F(x, f(x))$ を加えた理論を $\mathrm{PA}^\sharp$ と呼ぶと，f を含まない論理式 $A(a,b,c)$ に対してたとえばつぎの (1)(2) は同値である．

(1) $\mathrm{PA}^\sharp \vdash \ A(a,b,c) \to ((a < f(b)) \land (f(b) < c))$.

(2) $\mathrm{PA} \vdash \ A(a,b,c) \to \Big(\exists y \Big(F(b,y) \land (a<y)\Big) \land \exists z \Big(F(b,z) \land (z<c)\Big)\Big)$.

((1) の論理式から f を消去したのが (2) である.)

さらに，たとえば

(3) $\mathrm{PA} \vdash \ (\exists x A(a,x,c)) \to \exists x((a<x) \land (x<c))$

を示したいとする．もしも (2) が得られれば $\mathrm{PA} \vdash \forall x \exists ! y F(x,y)$ と合わせて推論をすれば (3) も得られるが，それよりも (1) から

(4) $\mathrm{PA}^\sharp \vdash \ (\exists x A(a,x,c)) \to \exists x((a<x) \land (x<c))$

を得るほうが，直接的で簡単である．するとこの論理式には関数記号 f が含まれないので，定理 5.1 を $\varphi \equiv \Big((\exists x A(a,x,c)) \to \exists x((a<x) \land (x<c))\Big)$ として適用すると (3) が得られる（この場合 $\varphi^\natural \equiv \varphi$ である）．つまり，$\mathrm{PA} \vdash \varphi$ を示すためには，PA に関数記号とそれに対する公理を追加した $\mathrm{PA}^\sharp$ について $\mathrm{PA}^\sharp \vdash \varphi$ を示せば，それで十分なのである．

このことを用いて，今後は PA に関数記号 pair, 1st, 2nd, decode, dpair（1.5 節や 3.2 節に登場したゲーデル数の定義や計算に使われる関数）とこれらに対する公理が入っているとして，議論を進めていく．なお，これらの関数記号が入った論理式に関しても $\Sigma_1/\Pi_1/\Delta_1$ という定義は 2.4 節のままでよい（すなわち，2.4 節の定義中の項 t や u に新しい関数記号が現れてもよい）．

1) [Shoenfield 1967, 4.6 節; 田中他 1997, 3.4 節; 田中 2002, 3.4 節] などをみよ．

なぜなら，これらの関数のグラフの論理式は Δ_1 でとることができ，そのことから，論理式 φ から関数記号を消去して $\varphi^\natural$ をつくる際に，φ が Σ_1（あるいは Π_1）ならば $\varphi^\natural$ も Σ_1（あるいは Π_1）にできるからである．

さらに同様にして，PA にはすべての原始再帰的関数の記号と公理が入っていると考えてもかまわない．これが 2.6 節の最後で述べたことである．

5.2　有限列コード化定理の形式化

1.5 節の議論を PA の中で形式化して行うことができる．たとえば，補題 1.3 を PA の中で形式化するとつぎが得られる．

$$(\dagger)\ \ \mathrm{PA} \vdash\ (\forall m > 0)(\forall n > 0)\Big(P(m,n) \to \exists x \exists y(m{\cdot}x - n{\cdot}y = \overline{1})\Big).$$

ただし $P(m,n)$ は「m と n が互いに素である」を表す論理式で，たとえばつぎのようにする．

$$P(m,n)\ \equiv\ (\forall x < (m+n))\Big((\overline{1} < x) \to (\neg(x|m) \vee \neg(x|n))\Big)$$
$$(x|m)\ \equiv\ (\exists a \le m)(x{\cdot}a = m),\ (x|n)\ \text{も同様.}$$

$(\dagger)$ を示すには補題 1.3 の証明をすべて PA の中で行えばよい．さらにそういう調子で 1.5 節のすべての議論を PA の中で形式化して行えば，最終的につぎが得られる．

定理 5.2（形式化された有限列コード化定理）　$f(i,n,\vec{y})$ を PA の項とする．すると

$$\mathrm{PA} \vdash\ \forall \vec{y} \forall n \exists e (\forall i \le n)(\mathrm{decode}(e,i) = f(i,n,\vec{y}))$$

である（この論理式は，$f(i,n,\vec{y})$ を x_i とみた有限列コード化定理（定理 1.8）を表している）．

この定理の証明，すなわち PA の中で 1.5 節の議論を展開する具体的な詳細はここでこれ以上追求しないことにするが，帰納法に関する注意を一つし

ておく．つぎの三つをそれぞれ「帰納法の原理」「累積帰納法の原理」「最小値原理」と呼ぶ．

- $\varphi(0)$ を示し，「$\varphi(x)$ が成り立つならば $\varphi(x+1)$ も成り立つ」を任意の x に対して示せば，「すべての x について $\varphi(x)$」がいえる．
- 「x 未満のすべての y に対して $\varphi(y)$ が成り立つのならば，$\varphi(x)$ も成り立つ」を任意の x に対して示せば，「すべての x について $\varphi(x)$」がいえる．
- $\varphi(x)$ が成り立つ x が存在するならば，そのような最小の x が存在する．

これらはそれぞれつぎの論理式で表される．

(1) $\Big(\varphi(0) \wedge \forall x\Big(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{S}(x))\Big)\Big) \to \forall x\varphi(x).$

(2) $\Big(\forall x\Big(((\forall y{<}x)\varphi(y)) \to \varphi(x)\Big)\Big) \to \forall x\varphi(x).$

(3) $(\exists x\varphi(x)) \to \exists x\Big(((\forall y{<}x)\neg\varphi(y)) \wedge \varphi(x)\Big).$

理論 PA には帰納法の公理があるので，上記の帰納法の原理が証明できる．つまり，任意の論理式 $\varphi(x)$ に対して (1) が PA で証明できる．ここでは，累積帰納法の原理と最小値原理も PA において証明できることを示す．

[帰納法の原理 $\Longrightarrow$ 累積帰納法の原理]
(1) の $\varphi(x)$ に $(\forall y{<}x)\varphi(y)$ を当てはめた式

$$(1')\quad \Big((\forall y{<}0)\varphi(y) \wedge \forall x\Big((\forall y{<}x)\varphi(y) \to (\forall y{<}\mathrm{S}(x))\varphi(y))\Big)\Big) \\ \to \forall x(\forall y{<}x)\varphi(y)$$

から (2) が得られる．その際，つぎの論理式が証明できることなどを用いる．

$$\neg(y < 0)$$
$$\Big((\forall y{<}x)\varphi(y) \wedge \varphi(x)\Big) \to (\forall y{<}\mathrm{S}(x))\varphi(y)$$
$$(\forall x(\forall y{<}x)\varphi(y)) \to \varphi(a) \quad (a \text{ は任意})$$

[累積帰納法の原理 $\Longrightarrow$ 最小値原理]
(2) の $\varphi(x)$ に $\neg\varphi(x)$ を当てはめた式

$$\Big(\forall x\Big(((\forall y{<}x)\neg\varphi(y)) \to \neg\varphi(x)\Big)\Big) \to \forall x\neg\varphi(x)$$

と (3) は同値になる．

1.5 節の議論には最小値原理を用いている箇所（たとえば補題 1.3 の証明中）もあるが，ここで示したことから，その部分も PA の内部で形式化して行うことができることがわかる．

5.3　証明可能性述語の定義

ここでは，PA の RE 拡大である理論 T に対する証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ の，詳細な定義を与える．

理論とは，どんな理論にも共通の「1 階述語論理の体系（公理と推論規則)」に「その理論の固有の公理」を加えたものである．1 階述語論理の体系は無数に存在するが（すなわち，公理や推論規則は異なるが証明できる論理式の集合は等しくなる無数の体系がある)，以下では一つの体系に固定して議論を進める．それはたとえばつぎのものである．

公理 $\varphi\to(\psi\to\varphi)$，$(\varphi\to(\psi\to\theta))\to((\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\theta))$，$\forall x(x=x)$，などいくつかの有限種類の形に該当する論理式．

推論規則「φ と $\varphi\to\psi$ から ψ を導く」（この規則を三段論法と呼ぶ)，および「x が φ に現れないときに，$\varphi\to\psi$ から $\varphi\to\forall x\psi$ を導く」（この規則を全称化と呼ぶ)．

これらに対して，つぎのような意味の Δ_1 論理式 $\mathrm{Ax}(x)$，$\mathrm{MP}(x,y,z)$，$\mathrm{Gen}(x,y)$ をそれぞれ適切につくることができる．

$\mathrm{Ax}(x) \Longleftrightarrow$「$x$ は 1 階述語論理の公理 (axiom) のゲーデル数である」

$\mathrm{MP}(x,y,z) \iff$「z は，ゲーデル数 x とゲーデル数 y の論理式から三段論法 (modus ponens) によって得られた論理式のゲーデル数である」

$\mathrm{Gen}(x,y) \iff$「y は，ゲーデル数 x の論理式から全称化 (generalization) によって得られた論理式のゲーデル数である」

具体的には，$\mathrm{MP}(x,y,z)$ はつぎの論理式にすればよい．

$$y = \mathrm{dpair}(\overline{8}, \mathrm{dpair}(x,z))$$

(論理式のゲーデル数の定義は $\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner = \mathrm{dpair}(8, \mathrm{dpair}(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner))$ であった.）Ax と Gen はもっと複雑になる．

理論 T の固有の公理のゲーデル数の集合 $\mathbf{Axiom}_T$ が RE であるならば，「x は T の固有の公理のゲーデル数である」を意味する Σ_1 論理式 $\mathrm{Ax}_T(x)$ が存在する（このことは RE の定義（定理 1.2(2)）と計算可能述語の表現定理（定理 2.10）によっていえる）．さらに，T が PA の拡大の場合には $\mathbf{Axiom}_{\mathrm{PA}} \subseteq \mathbf{Axiom}_T$ であるが，このことを PA で証明できるように論理式 $\mathrm{Ax}_{\mathrm{PA}}(x)$, $\mathrm{Ax}_T(x)$ を適切にとる．正確には，つぎの (†) が成り立つようにする．

(†) $\mathrm{PA} \vdash \forall x(\mathrm{Ax}_{\mathrm{PA}}(x) \to \mathrm{Ax}_T(x))$

以上の論理式を用いてつくったつぎの論理式を $\mathrm{Prov}_T(y,x)$ とする．

$$(\exists n < y)(\exists e < y)\Big((y = \mathrm{pair}(n,e)) \land (x = \mathrm{decode}(e,n)) \land \Lambda\Big)$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\Lambda &\equiv (\forall i \le n)\Big(\mathrm{Ax}_T(\mathrm{decode}(e,i)) \lor \mathrm{Ax}(\mathrm{decode}(e,i)) \lor \Gamma \lor \Delta\Big), \\
\Gamma &\equiv (\exists j < i)(\exists k < i)\mathrm{MP}(\mathrm{decode}(e,j), \mathrm{decode}(e,k), \mathrm{decode}(e,i)), \\
\Delta &\equiv (\exists j < i)\mathrm{Gen}(\mathrm{decode}(e,j), \mathrm{decode}(e,i))
\end{aligned}$$

である（T における証明とは論理式の列であるが，そのゲーデル数の定義は $\ulcorner\varphi_0, \ldots, \varphi_n\urcorner = \mathrm{pair}(n,e)$，ただし $(\forall i \le n)(\mathrm{decode}(e,i) = \ulcorner\varphi_i\urcorner)$ であった）．

第二不完全性定理のための証明可能性述語 $\mathrm{Pr}_T(x)$ はこの Prov_T を使った論理式 $\exists y \mathrm{Prov}_T(y,x)$ であり，$\mathrm{Con}(T)$ はこの $\mathrm{Pr}_T(x)$ を使った文 $\neg\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\bot\urcorner})$ である．

以上の定義からつぎのことがわかる．

定理 5.3　理論 T が PA の RE 拡大ならば論理式 $\mathrm{Pr}_T(x)$ が上のように定義できて，これは Σ_1 論理式であり，任意の論理式 φ に対して

$$T \vdash \varphi \iff \mathrm{N} \models \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$$

（証明可能性述語としての当然の条件）を満たす．

さらに上記の (†) からつぎも示される．

定理 5.4　$\mathrm{PA} \vdash \ \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner})$.

5.4　導出可能性条件 D2 の証明

ここでは定理 4.2 の中の **D2**，すなわちつぎを証明する．

定理 5.5（導出可能性条件 **D2**）　T が PA の RE 拡大ならば，任意の論理式 φ, ψ について

$$T \vdash \ \left(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\varphi\to\psi\urcorner})\right) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner\psi\urcorner}).$$

証明　「証明 P のゲーデル数 x と証明 Q のゲーデル数 y と論理式 ψ のゲーデル数 k をもらって，P と Q と ψ を順に並べた証明のゲーデル数を返す関数」を $g(x,y,k)$ とする（P が φ の証明で Q が $\varphi\to\psi$ の証明ならば，$g(x,y,k)$ は三段論法を最後に用いた ψ の証明のゲーデル数になる）．この関数のグラフ論理式 $G(x,y,k,z)$ は以下のように書ける．

$$G(x,y,k,z) \equiv G'(x,y,k,z) \wedge (\forall z' < z)\neg G'(x,y,k,z'),$$

$$
\begin{aligned}
G'(x,y,k,z) \equiv& \\
&\Big(1\mathrm{st}(z) = 1\mathrm{st}(x) + 1\mathrm{st}(y) + \overline{2}\Big) \wedge \\
&\Big(\forall i \le 1\mathrm{st}(x)\Big)\Big(\mathrm{decode}(2\mathrm{nd}(z), i) = \mathrm{decode}(2\mathrm{nd}(x), i)\Big) \wedge \\
&\Big(\forall i \le 1\mathrm{st}(y)\Big)\Big(\mathrm{decode}(2\mathrm{nd}(z), 1\mathrm{st}(x) + \overline{1} + i) = \mathrm{decode}(2\mathrm{nd}(y), i)\Big) \wedge \\
&\Big(\mathrm{decode}(2\mathrm{nd}(z), 1\mathrm{st}(x) + 1\mathrm{st}(y) + \overline{2}) = k\Big).
\end{aligned}
$$

すると,

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x \forall y \forall k \exists ! z G(x,y,k,z)$$

である. このことは

$$
f(i,x,y,k) = \begin{cases}
\mathrm{decode}(2\mathrm{nd}(x), i) & (i \le 1\mathrm{st}(x) \text{ のとき}) \\
\mathrm{decode}(2\mathrm{nd}(y), i) & (1\mathrm{st}(x) < i \le (1\mathrm{st}(x) + 1\mathrm{st}(y) + 1) \text{ のとき}) \\
k & (\text{それ以外のとき})
\end{cases}
$$

なる PA の項 $f(i,x,y,k)$ を適切につくって, これを用いて定理 5.2 などを使って示される. すると 5.1 節の議論によって PA には関数記号 g があるとしてよい. この g を使った論理式

$$\forall x \forall y \Big(\Big(\mathrm{Prov}_T(x, \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \wedge \mathrm{Prov}_T(y, \overline{\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner})\Big) \to \mathrm{Prov}_T(g(x, y, \overline{\ulcorner \psi \urcorner}), \overline{\ulcorner \psi \urcorner})\Big)$$

は PA で証明できる (このことは $G(x,y,k,z)$ の定義と Prov_T の定義からわかる). これから, 1 階述語論理の推論によって

$$\mathrm{PA} \vdash \Big(\mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}) \wedge \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner})\Big) \to \mathrm{Pr}_T(\overline{\ulcorner \psi \urcorner})$$

を得る. ■

5.5 Σ_1 完全性定理の形式化

ここでは定理 4.2 の中の **D3** のために必要なつぎの定理の証明を行う.

定理 5.6（形式化された Σ_1 完全性定理） 任意の Σ_1 文 φ に対して

$$\mathrm{PA} \vdash \varphi \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\ulcorner \varphi \urcorner).$$

はじめにいくつかの準備をする．以下の議論には項や論理式のゲーデル数の定義が必要なので，それについては 3.2 節を参照されたい．

まず，関数 num を

$$\mathrm{num}(x) = \ulcorner \overbrace{\mathrm{S}(\mathrm{S}(\cdots \mathrm{S}(}^{x\text{ 個}} 0) \cdots))\urcorner$$

（すなわち x を値とする数項のゲーデル数）

と定義する．この関数のグラフ論理式 $N(x,y)$ はつぎのように書ける．

$$\begin{aligned} N(x,y) \;\equiv\; & \exists a\Big((\mathrm{decode}(a,0) = \overline{1}) \wedge (\mathrm{decode}(a,x) = y) \wedge \\ & (\forall i < x)(\mathrm{decode}(a,\mathrm{S}(i)) = \mathrm{dpair}(0,\mathrm{decode}(a,i)))\Big). \end{aligned}$$

すると定理 5.2 などを使って

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x \exists! y N(x,y)$$

が成り立つ．そこで 5.1 節の議論によって，PA は関数記号 num をもつとする．

つぎに，項 t に対して t と同じ変数をもつ項 $t^\star$ をつぎのように再帰的に定義する．

$0^\star \;\equiv\; \overline{1}.$

a が変数のとき，$a^\star \;\equiv\; \mathrm{num}(a).$

u が項のとき，$(\mathrm{S}(u))^\star \;\equiv\; \mathrm{dpair}(0, u^\star).$

u と v が項のとき，$(u+v)^\star \;\equiv\; \mathrm{dpair}(\overline{1}, \mathrm{dpair}(u^\star, v^\star)).$

u と v が項のとき，$(u \cdot v)^\star \;\equiv\; \mathrm{dpair}(\overline{2}, \mathrm{dpair}(u^\star, v^\star)).$

変数 $x_1, \ldots, x_k$ をもつ項 $t(\vec{x})$ に対して，$t(\vec{x})^\star$ は

$$\ulcorner t(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_k}) \urcorner$$

を意味する項（すなわち，各変数の指す値から「それらを数項として代入した項全体のゲーデル数」を求める項）になる．さらに同様にして，$x_1, \ldots, x_k$ を自由変数としてもつ論理式 $\chi(\vec{x})$ に対して，同じ自由変数をもち $\ulcorner \chi(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_k}) \urcorner$ を意味する項 $\chi(\vec{x})^\star$ をつぎのように再帰的に定義する．

u と v が項のとき，$(u{=}v)^\star \ \equiv\ \mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}(u^\star, v^\star))$.

u と v が項のとき，$(u{<}v)^\star \ \equiv\ \mathrm{dpair}(\overline{4}, \mathrm{dpair}(u^\star, v^\star))$.

φ が論理式のとき，$(\neg\varphi)^\star \ \equiv\ \mathrm{dpair}(\overline{5}, \varphi^\star)$.

φ と ψ が論理式のとき，$(\varphi\wedge\psi)^\star \ \equiv\ \mathrm{dpair}(\overline{6}, \mathrm{dpair}(\varphi^\star, \psi^\star))$.

$(\varphi\vee\psi)^\star$, $(\varphi\rightarrow\psi)^\star$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)^\star$ は $(\varphi\wedge\psi)^\star$ の $\overline{6}$ をそれぞれ $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{9}$ に変える．

φ が論理式で a が変数のとき，$(\forall a\varphi)^\star \equiv \mathrm{dpair}(\overline{10}, \mathrm{dpair}(\overline{\ulcorner a \urcorner}, \varphi^{\star\prime}))$.
ただし $\varphi^{\star\prime}$ は項 $\varphi^\star$ の中に出現する num(a) という部分をすべて $\overline{\ulcorner a \urcorner}$ に置き換えて得られる項である．

$(\exists a\varphi)^\star$ は $(\forall a\varphi)^\star$ の $\overline{10}$ を $\overline{11}$ に変える．

たとえば，変数 x のゲーデル数が 3 ならば

$$(\exists x(y < x))^\star \ \equiv\ \mathrm{dpair}(\overline{11}, \mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}(\overline{4}, \mathrm{dpair}(\mathrm{num}(y), \overline{3}))))$$

である．

さて，φ が文の場合は $\mathrm{PA} \vdash \varphi^\star = \overline{\ulcorner \varphi \urcorner}$ となるので，つぎの補題から定理 5.6 はただちに導かれる．

補題 5.7（形式化された補題 2.6） 任意の Σ_1 論理式 φ に対して，$\mathrm{PA} \vdash \varphi \rightarrow \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\varphi^\star)$.

証明　補題 2.6 の証明と同じく，φ が Σ_1 であることの定義に関する帰納法による．ここでは Σ_1 の定義のうち「$\varphi \equiv (\forall x < t)\psi$ で ψ が Σ_1」の場合だけを示す．

証明のためにいくつか準備をする（「準備」の証明については後述する）．y は $(\forall x < t)\psi$ に現れない変数とする．$(\forall x < y)\psi$ は $\forall x((x < y) \to \psi)$ の略記であったことと $\star$ の付いた項の定義から，つぎの項が $((\forall x < y)\psi)^\star$ ということになる．

$$\mathrm{dpair}(\overline{10}, \mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}(\overline{8}, \mathrm{dpair}(\mathrm{dpair}(\overline{4}, \mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{num}(y))), \psi^{\star\prime}))))$$

（ただし，変数 x のゲーデル数は 3 として，$\psi^{\star\prime}$ は $\psi^\star$ 中の $\mathrm{num}(x)$ をすべて $\overline{3}$ に置き換えた項である）

この項を，$\mathrm{num}(y)$ の部分を指定して $\mathbf{u}[\mathrm{num}(y)]$ と書くことにする．すると，たとえば

$$\mathbf{u}[t^\star] \equiv \mathrm{dpair}(\overline{10}, \mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}(\overline{8}, \mathrm{dpair}(\mathrm{dpair}(\overline{4}, \mathrm{dpair}(\overline{3}, t^\star)), \psi^{\star\prime}))))$$

であり，この項は $((\forall x < t)\psi)^\star$ に等しい．

（準備 1）a, b は今までの議論に現れない変数としたとき，つぎが成り立つ．

$$\mathrm{PA} \vdash \Big(\mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}(b, a))) \wedge \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\mathbf{u}[a])\Big) \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\mathbf{u}[b]).$$

これはつぎの事実を形式化したものである．

$$\mathrm{PA} \vdash q = p \text{ かつ } \mathrm{PA} \vdash (\forall x < p)\psi \text{ ならば } \mathrm{PA} \vdash (\forall x < q)\psi.$$

（p, q は任意の項.）

（準備 2）t が項であるとき，

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}(t^\star, \mathrm{num}(t)))).$$

これは，定理 2.2(1) の証明に使われた「事実」を少し一般化したつぎの命題を形式化したものである．

項 t^* は t 中のすべての変数へ数項を代入して得られた項とする．t^* の値が n ならば（すなわち $\mathrm{N} \models t^* = \overline{n}$ ならば），$\mathrm{PA} \vdash t^* = \overline{n}$ である．

（準備 3）n は今までの議論に現れない変数であるとき，

$$\mathrm{PA} \vdash \Big((\forall x < n)\mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\psi^\star)\Big) \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(((\forall x < n)\psi)^\star).$$

これは定理 2.4(1) の形式化である．

これらの準備を使って，$\varphi \equiv (\forall x < t)\psi$ の場合の補題 5.7 を証明する．帰納法の仮定（$\mathrm{PA} \vdash \psi \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\psi^\star)$）から，

$$\mathrm{PA} \vdash \Big((\forall x < t)\psi\Big) \to (\forall x < t)\mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(\psi^\star)$$

が得られる．これと，準備 3 の n に t を代入したもの（ここで $((\forall x < n)\psi)^\star \equiv \mathbf{u}[\mathrm{num}(n)]$ であることに注意），準備 2，および準備 1 の a に $\mathrm{num}(t)$ を b に $t^\star$ を代入したものから，求める

$$\mathrm{PA} \vdash \Big((\forall x < t)\psi\Big) \to \mathrm{Pr}_{\mathrm{PA}}(((\forall x < t)\psi)^\star)$$

が得られる． ■

以上で補題 5.7 が（したがって定理 5.6 が）示されたが，「準備」の証明がまだ残っている．

準備 1 は定理 5.5 とほぼ同様にできる（$q = p$ と $(\forall x < p)\psi$ から $(\forall x < q)\psi$ を導くことは 1 階述語論理でできるが，これがそのまま推論規則になっていれば定理 5.5 と同じ議論になるし，そうでないにしても本質的には変わらない）．

準備 2，準備 3 を証明するには，基本的には 2.3 節での議論をすべて PA の中で形式化して行えばよい．しかし実際にそれをやろうとすると，メタな立場では無意識に行っていた議論をいちいちゲーデル数の定義まで立ち帰って行わなければならない．たとえば定理 2.1(1) を PA の中で形式化して行うとは，

$$\mathrm{PA} \vdash \forall n \forall m \mathrm{Pr_{PA}}(\mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}((n+m)^\star, \mathrm{num}(n+m))))$$

を示すということである．これは，n を自由変数として

$$\varphi(m) \;\equiv\; \mathrm{Pr_{PA}}(\mathrm{dpair}(\overline{3}, \mathrm{dpair}((n+m)^\star, \mathrm{num}(n+m))))$$

とおき，

(i) $\mathrm{PA} \vdash \varphi(0)$,

(ii) $\mathrm{PA} \vdash \forall m(\varphi(m) \to \varphi(\mathrm{S}(m)))$

と帰納法の公理から求められるが，たとえば (ii) のためには，

つぎの等式は PA で証明できる：

$$\overline{n}+\mathrm{S}(\overline{m}) = \mathrm{S}(\overline{n}+\overline{m}) = \mathrm{S}(\overline{n+m}) = \overline{n+m+1}$$

というメタな議論を形式化して行う必要がある．この 1 番目の等式変形に相当するのは

$$\mathrm{PA} \vdash \forall n \forall m \mathrm{Pr_{PA}}((n+\mathrm{S}(m)=\mathrm{S}(n+m))^\star)$$

であるが，これは「PA における $\overline{n}+\mathrm{S}(\overline{m}) = \mathrm{S}(\overline{n}+\overline{m})$ の証明のゲーデル数」を，新しい関数記号 g を使って $g(n,m)$ という項の形で書けることを示してから，

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Prov_{PA}}(g(n,m), (n+\mathrm{S}(m)=\mathrm{S}(n+m))^\star),$$
$$\mathrm{PA} \vdash \exists y \mathrm{Prov_{PA}}(y, (n+\mathrm{S}(m)=\mathrm{S}(n+m))^\star)$$

として証明する．また，3 番目の等式変形には

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{dpair}(0, \mathrm{num}(x)) = \mathrm{num}(\mathrm{S}(x))$$

が必要であり，これは関数 num の定義に戻って証明しなければならない．この調子で 2.3 節や 2.4 節の議論をすべて PA の中で形式化して行えば，求める補題 5.7 は完全に証明される．しかしこれは非常に莫大な作業になり，現実に遂行するのは大変である．ここまで読み進んできた読者には，その大変さの量と質，および「困難だがやればできる」という感覚が理解できるだろう．

参考文献

第I部執筆の際に参考にした文献や関連する文献をあげておく．

不完全性定理に関する本は数多く出版されているが，その中で永く広く読まれている定評ある教科書には [前原 1977]，[Smorynski 1977] などがある．[Boolos 1993] には第二不完全性定理の証明がくわしく載っている．ゲーデルのオリジナル論文の日本語訳は [林・八杉 2006] や [廣瀬・横田 1985] に載っている．とくにこの前者には，不完全性定理の背景がヒルベルトを中心としてくわしく説明されている．[田中他 1997] は第I部全体のベースになっている本であり，この中の不完全性定理に関する議論を新たに平易に編み直すという方針で本書第I部は執筆された．

本文中で数理論理学と計算論の教科書について触れたが，それらの入門書としては [小野 1994]，[渡辺・米崎 1997] をあげておく．また本シリーズ第2巻『完全性定理とモデル理論』に述語論理入門が載っているし，ほかにも良い入門書はたくさんある．数理論理学と計算論について入門書を超えた話題に対しては [Shoenfield 1967]，[Odifreddi 1989] をあげておく．これらには，他書にあまり書かれないことも含めて多くの話題が詳細に載っている．

[Boolos 1993] Boolos, G., *The Logic of Provability*, Cambridge University Press (1993).

[林・八杉 2006] 林晋・八杉満利子『不完全性定理』岩波文庫，岩波書店 (2006).

[廣瀬・横田 1985] 廣瀬健・横田一正『ゲーデルの世界：完全性定理と不完全性定理』海鳴社 (1985).

[前原 1977] 前原昭二『数学基礎論入門』朝倉書店 (1977).

[Odifreddi 1989] Odifreddi, P., *Classical Recursion Theory*, North-Holland (1989).

[小野 1994] 小野寛晰『情報科学における論理』日本評論社 (1994).

[Shoenfield 1967] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison-Wesley (1967). リプリント版：AK Peters (2001).

[Smorynski 1977] Barwise, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland (1977) の中で Smorynski, C. が書いている The Incompleteness Theorem の章.

[田中他 1997] 田中一之・鹿島亮・角田法也・菊池誠『数学基礎論講義：不完全性定理とその発展』日本評論社 (1997).

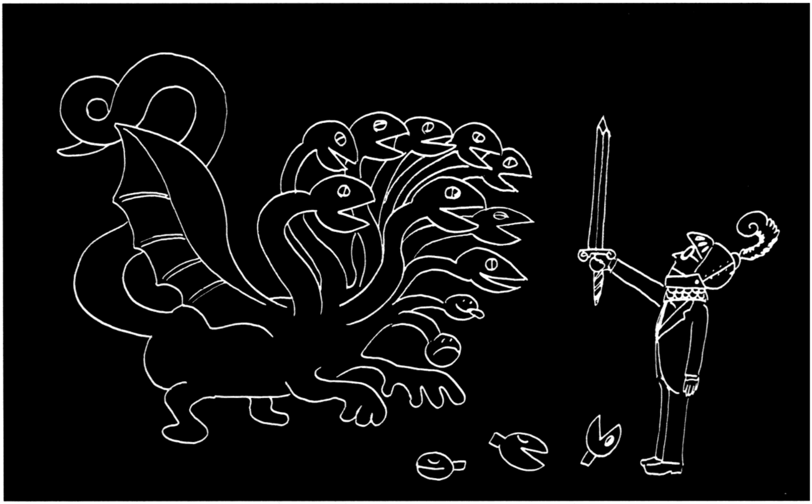
[田中 2002] 田中一之『数の体系と超準モデル』裳華房 (2002).

[渡辺・米崎 1997] 渡辺治・米崎直樹『計算論入門：計算の基本原理理解のために』日本評論社 (1997).

II

逆数学と２階算術

山崎 武



第 II 部は数理論理学（ロジック）の研究領域の一つである逆数学について紹介する．具体的な内容に入る前に，逆数学とは何を研究する分野であるかについて，ここで簡単に触れておきたい．

逆数学の目的を一言でいうと，数学の定理を，「それを証明するのに必要な集合存在公理は何か」という観点から分類することである．この企てを広く捉えるならば，それは数学の基礎付けに関するつぎの問題に帰着する．

問題 A　既知である任意の数学の定理に対して，どの（数学的）原理があればそれを証明できるかを決定せよ．

この問題で重要なのは，ある原理が定理を示すために十分であることを確かめるだけにとどまらず，その原理がないと定理が証明できないということも確かめようとしているところにある．

ところで，われわれが実際に扱うのは，自然数論や解析，代数，はたまたそれらを総括するような広範囲の数学領域を形式化しうる 1 階述語論理の形式体系である．たとえば，公理的集合論の形式体系 ZFC は，（おおよそ）数学全般の枠組みを与える形式体系であると考えられる[1)]．ここで「任意のベクトル空間は基底をもつ」という主張 VB を考えてみる．VB は ZF（ZFC から選択公理を除いたもの）において選択公理と同値の命題であることが知られている．このように，VB に対して問題 A は厳密な答えをもつと考えることができる．すなわち，（ZF において）選択公理があれば VB は証明でき，選択公理がなければ証明できない．選択公理と同値であることが知られている主張は，整列可能定理やツォルンの補題，チコノフの定理など他にもたくさんある [田中 2005]．

それでは，他の数学の定理に対しても，同様の形で問題 A に答えることができるだろうか．扱う数学の定理の範囲を絞って考えることにしよう．ここで，数学を集合論的な領域と非集合論的な領域の二つに分ける[2)]．集合論的な領域としては，とくに抽象的な集合概念を直接用いるような領域を考えることにする．具体的には，一般位相空間論，抽象的な関数解析，集合論，圏

1)　本シリーズ第 4 巻第 I 部，とくに第 1 章と第 2 章を参照．
2)　以下の区別は厳密なものではなく，便宜上のきわめていい加減な区分けである．

論などである．一方，非集合論的な領域としては，抽象的な集合概念を直接には必要としないような数学の領域を考える．非集合論的な領域は古典的数学ともいう．たとえば，古典的な，幾何や数論，微分方程式，実解析，複素解析，可算代数，または，組み合わせ論，数理論理学，計算論などである．古典的記述集合論などは古典的数学に入れる．一般に集合論的な領域に必要な集合存在公理のほうが古典的数学に必要な集合存在公理よりはるかに強いと考えられる．また，集合論的な領域よりも古典的数学のほうがなじみがあると思う．そこで，調べる対象を古典的数学の定理に制限し，さらに対応する「原理」を集合存在公理に絞ることにすれば問題 A はつぎのように言い換えられる．

> **問題 B**　古典的数学の任意の定理に対して，どの集合存在公理があればそれを証明できるかを決定せよ．

問題 B は古典的数学に対象を制限したので，（抽象的な集合の概念を用いて数学を展開する）ZFC もしくは ZF は，扱う形式体系としては，扱いが難しくあまり適切ではない場合が多い．代わりに，ZF よりもはるかに弱いけれども古典的数学全般の枠組みとなりうるような，形式体系を扱う．それが 2 階算術 Z_2 である．

2 階算術 Z_2 は，自然数と自然数からなる集合のような 2 種類の対象を同時に扱う形式体系である．有理数は自然数によって表現でき，実数は，デデキント切断などを用いて有理数の集合として定義できる．このとき，有理数の集合は自然数の集合ともみなせるから，Z_2 において実数を定めることができる．有理数のコーシー列によって実数を定めることも同様に Z_2 において可能である（第 2 章 2.1 節参照）．各数学的概念を 2 階算術の言語にあわせて定めるこのような「翻訳」をコード化という．実数上の実数値関数の一般的なコード化は，Z_2 の言語の制約上，不可能である．にもかかわらず，多くの重要な関数は Z_2 で扱える．たとえば連続関数を Z_2 で定めることは可能である．この意味で Z_2 は解析 (analysis) とも呼ばれる．さらに，ヒルベルトとベルナイスはその著書 [Bernays and Hilbert 1968–1970] の補遺において，古

典的数学がどのように Z_2 で展開されうるかについて概説している[3)]. 実際, 非常に多くの古典的数学の定理が Z_2 で証明できることがわかっている. そこで問題 B をさらにつぎのように制限しよう.

問題 C　2 階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ で（コード化を通して）書き表せる任意の古典的数学の定理に対して, どの集合存在公理があればそれが証明できるかを決定せよ.

1960 年代後半から 70 年代にかけて行われた, Z_2 における数学の展開に関する研究を通し, フリードマンは, 問題 C に対して多くの場合で明確な答えが与えられることを発見した. 1974 年のカナダのバンクーバーで開かれた国際数学者会議での逆数学のはじまりとされる講演 [Friedman 1974] で, 彼はつぎの主張をしている.

原則 I　適切な公理から定理が証明できるならば, その公理はその定理から証明できる.

つまり, 古典的数学の定理において, 公理から定理を導く数学の通常のパターンとは逆に, 定理から, それを証明するのに用いた公理を導くことができるというのである. 逆数学はこの原則に基づく.「逆」数学という名前もこれに由来する.

原則 I の言わんとするところをもう少し明確にしよう. Z_2 で数学を展開するとき最も大きな役割を果たしているのは内包公理である. 内包公理とは, 大まかにいうと, 任意の論理式 $\varphi(n)$ に対して, $\varphi(n)$ を満たすすべての自然数 n からなる集合が存在するという主張である. この内包公理の役割を調べるとき, 実際には, 各論理式ごとの個々の具体的な内包公理よりも, 内包公理を制限することによって特徴付けられる Z_2 の部分体系を調べるほうがよい. 以下では, そのようにして得られる部分体系を単に体系と呼ぶことにする.

τ を 2 階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ で表せる古典的数学の定理とする. 普通, τ を意味のある主張とするのに必要な体系は τ を証明するのに必要な体系よりもはるかに弱いもので十分である. たとえば, 実数を定義するのに必要な公理は, 実

3)　厳密には Z_2 に対応するような体系を考えている.

数のいろいろな性質を示すのに必要な公理よりも弱いものでいいということは自然に納得できると思う．十分に弱い体系 S を一つ固定したとしても，多くの場合の τ において，τ の中に現れる概念は S の中ですべて定義できる．この S を基本体系 (base theory) といい，τ は S で定まるという．実際の研究では S として RCA_0 が用いられる場合が多い．RCA_0 は大まかにいうと計算機が扱える程度の数学領域に対応する形式体系であり，再帰的解析学 (recursive analysis) などの形式化にあたる．

よって，原則 I をもう少し厳密にすればつぎのようになる．

> （RCA_0 で定まる）古典的数学の定理 τ に対して，多くの場合，適切な体系 T を選べば RCA_0 上で T と τ の同値性が証明できる[4]．

たとえば τ をボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理「任意の有界実数列は収束する部分列をもつ」とすると，1 階ペアノ算術 PA の自然な拡大である体系 ACA_0 が，τ と RCA_0 上同値となる．

驚くべきことはつぎの事実である．τ と（RCA_0 上で）同値な体系を S_τ とする．無数の τ を考えれば，S_τ として現れる体系は無数にあるように思われる．しかし，1970 年代後半以降の多くの研究によって，S_τ として現れる体系は RCA_0, ACA_0 の他に WKL_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 のあわせて五つくらいしかないことが明らかになっている[5]．

以上のことから，もう一度逆数学の目的をはっきりと書き表しておこう．それはつぎの事実を確かめることである．

> (RM) 多くの古典的数学の定理 τ に対して，τ は RCA_0 で証明

---

4) 定理 τ によっては RCA_0 では定められない場合がある．この場合，RCA_0 は基本体系としてふさわしくない．このときは RCA_0 より強い別の体系を基本体系とする．また逆に，RCA_0 ですでに証明できる定理の中には，RCA_0 より弱い体系でも定まるものがある．RCA_0 よりも弱い体系を基本体系にして，定理と RCA_0 の同値性を調べる研究もある [Hatzikiriakou 1989a; 1989b; Simpson and Smith 1986]．

5) これらの体系の名前はそれぞれを特徴付ける集合存在公理に由来する．たとえば，RCA は再帰的内包公理 (recursive comprehension axiom) の略であり，再帰的集合の存在を保証するものである．五つの体系の定義およびその特徴についてくわしくは第 1 章で述べる．下付きの 0 は数学的帰納法が制限されていることを表している．

できるか，もしくは，T を WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 のいずれかとすれば，RCA_0 上で T と τ の同値性が証明できる．

第 II 部では以下，つぎの手順で逆数学の具体的な内容について紹介していく．まず，第 1 章で 2 階算術に関する基本的な事項と五つの体系 RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 について解説する．第 2 章で本題である逆数学について解説する．はじめに，基本体系 RCA_0 においてどのように古典的数学を形式化していくかを述べる．このとき具体的な各数学的対象がどのようにコード化されるかが明らかになるだろう．第 2 章の後半からは逆数学の結果とその特徴について述べる．そして最後（第 3 章）に，逆数学周辺の話題を四つ紹介する．

全体として第 II 部は，逆数学の勉強をはじめるための自己完結した教科書というよりも，最近の逆数学およびその周辺の結果をふまえた概要となってしまった．これから逆数学について本格的に学ぼうとする方には第 II 部と同名の田中による著書 [田中 1997] とシンプソンの代表的教科書 [Simpson 1999] を薦める．第 II 部はこれらの副読本としても読めるようにしたつもりである．

執筆が遅れたことにより，読者のみなさまをはじめとする多くの方々に迷惑をおかけしました．また，さまざまな改善において，助言を与えてくださった方々に感謝します．

第1章
2階算術と部分体系

序でも述べたように，2階算術 Z_2 は，自然数と自然数からなる集合の2種類の対象を同時に扱う形式体系である．Z_2 の公理の中でわれわれがとくに興味をもっているのは集合存在に関する公理である．この集合存在公理に制限を加えることで Z_2 のさまざまな部分体系が与えられる．

まず，1.1節では，Z_2 の基本事項について述べる．Z_2 の言語，その解釈，Z_2 の公理についてである．1.2節以降で紹介する Z_2 の部分体系は，RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 の五つである．次章で述べるように，これらの体系は逆数学において重要な役割を果たす．はじめに，1.2節で ACA_0 と Π^1_1-CA_0 について解説し，順次，RCA_0, WKL_0, ATR_0 と述べていく．

ここでは，再帰理論（帰納的関数論，計算論）および1階述語論理や PA に関する知識はある程度仮定する．本シリーズ第2巻および本書第I部も参考にしていただきたい．

1.1　2階算術

1.1節では2階算術の形式体系 Z_2 について解説する．まず，2階算術の言語とその意味論について紹介しよう．以下では1階ペアノ算術 PA の言語を $\mathcal{L}_1$ で表し，2階算術の言語を $\mathcal{L}_2$ で表すことにする．

通常の1階述語論理と異なり，$\mathcal{L}_2$ は2種類の変数をもつ．2種類の変数

のうち，一つはその動く範囲（の意図された解釈）が自然数の全体 ω（オメガ）である変数で，これを数変数といい，$x, y, l, m, n, \cdots$ など小文字のアルファベットで表す．二つめはその動く範囲（の意図された解釈）が ω のベキ集合 $\mathcal{P}(\omega)$ である変数で，これを集合変数といい，$X, Y, Z, \cdots$ など大文字のアルファベットで表す．

$\mathcal{L}_2$ は $\mathcal{L}_1$ と同じく，数に関する定数記号 0，1，和・積を表す関数記号 $+, \cdot$ をもつ[1]．通常の項の定義と同じようにして数変数とこれらの記号と括弧の組み合わせでできる記号列で自然数を表すものを数項 (numerical term) という．つまり，数項は $\mathcal{L}_1$ の項のことである[2]．集合に関する項は集合変数だけである．関係記号は等号 $=$，不等号 $<$ の他に $\in$ がある．t_1 と t_2 を数項，X を集合変数とするとき，$t_1 = t_2$, $t_1 < t_2$ あるいは $t_1 \in X$ の形の記号列を $\mathcal{L}_2$ の原子論理式という．通常の論理式の定義と同じようにして，原子論理式から，論理記号 $\neg$（否定），$\wedge$（かつ），$\vee$（または），$\to$（ならば），$\leftrightarrow$（同値）と，数変数に対する量化記号 $\forall x$（任意の数 x について），$\exists x$（ある数 x が存在して），および集合変数に対する量化記号 $\forall X$（任意の集合 X について），$\exists X$（ある集合 X が存在して）を適切に組み合わせてできる記号列を $\mathcal{L}_2$ の論理式という．$\mathcal{L}_2$ の論理式は単に論理式ということにする．自由変数のない論理式は文という．以降，括弧の省略など普通に使われる用例にしたがって，数項と論理式は意味のとりやすい形で表現し，厳密な形では表記しない．たとえば，$\neg((1+1)+1 \in X)$ は $3 \notin X$，$t < s \vee t = s$ は $t \leq s$，$\forall n(n \in X \to n \in Y)$ は $X \subseteq Y$ という具合に表す．ここで，$\mathcal{L}_2$ の等号記号 $=$ は厳密には二つの数項間にのみ用いられるものであり，集合変数に関する表記 $X = Y$ は論理式 $\forall n(n \in X \leftrightarrow n \in Y)$ の略にすぎないことに注意する．したがって，項の等式 $t_1 = t_2$ は原子論理式だが，集合に関する等式 $X = Y$ は原子論理式ではない．

定義 1.1（$\mathcal{L}_2$ 構造）　つぎの 4 条件を満たす七つの組

---

1)　第 I 部と第 III 部では，PA の言語に後者関数を表す S が含まれているが，記号 S は以下で述べる ω モデルの 2 階部分と紛らわしいので，ここでは後者関数記号を除き，定数記号 1 をもつものを採用することにする．本質的には何も変わらない．

2)　第 I 部第 2 章の数項 (numeral) とは用語の意味が違うことに注意する．

$$\mathcal{M} = (M, S_M, 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}})$$

を $\mathcal{L}_2$ 構造または，$\mathcal{L}_2$ モデルという．

(1) $0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}} \in M$ かつ $\emptyset \neq S_M \subseteq \mathcal{P}(M)$.

(2) $M \cap S_M = \emptyset$.

(3) $+^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}$ はともに M 上の 2 項演算.

(4) $<^{\mathcal{M}}$ は M 上の 2 項関係を表す.

M は数変数のための領域を表し，S_M は集合変数のための領域を表す．$\mathcal{L}_2$ に $|\mathcal{M}| = M \cup S_M$ の要素に対応する新しい定数記号を加えた言語を $\mathcal{L}_2(|\mathcal{M}|)$ とする．$\mathcal{L}_2$ と同じく $\mathcal{L}_2(|\mathcal{M}|)$ の論理式も定めることができる．$\mathcal{L}_2$ の論理式は $\mathcal{L}_2(|\mathcal{M}|)$ の論理式でもある．$\mathcal{L}_2(|\mathcal{M}|)$ の論理式のことを（$\mathcal{M}$ における）$\mathcal{L}_2$ のパラメータ付き論理式という．$\in$ はつねに通常の要素関係として解釈することで，一般のパラメータ付き文は $\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M}$ において自然に解釈される．パラメータ付き文 φ が $\mathcal{M}$ で真であることを $\mathcal{M} \models \varphi$ と表す．たとえば，

$$\mathcal{M} \models \varphi_1 \vee \varphi_2 \iff (\mathcal{M} \models \varphi_1 \text{または} \mathcal{M} \models \varphi_2),$$

$$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x) \iff (\mathcal{M} \models \varphi(\underline{a}) \text{ となる } a \in M \text{ が存在する}),$$

$$\mathcal{M} \models \forall X \varphi(X) \iff (\text{任意の } A \in S_M \text{ に対して，} \mathcal{M} \models \varphi(\underline{A}))$$

である．ここで，$\underline{a}$, $\underline{A}$ はそれぞれ a, A に対応する定数記号である．以降は $\varphi(\underline{a})$ や $\varphi(\underline{A})$ などは単に $\varphi(a)$, $\varphi(A)$ と書く．

$A \subseteq M$ は，x だけを自由変数にもつあるパラメータ付き論理式 $\varphi(x)$ で

$$A = \{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi(a)\}$$

となるとき，$\mathcal{M}$ 上定義可能であるという．

$\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M} = (M, S_M, 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}})$ から S_M をのぞいた

$$(M, 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}})$$

は，1 階算術の言語 $\mathcal{L}_1$ の構造である．これを $\mathcal{M}$ の 1 階部分という．代表的な $\mathcal{L}_2$ 構造は 1 階部分が PA のモデルの場合である．第 I 部では PA の標準

モデルを N で表したが，ここでは ω を用いる．先にも述べたように，ω は標準モデルの領域（自然数全体の集合）を表す場合にも用いている．

定義 1.2（ω モデル）　1 階部分が PA の標準モデル ω である $\mathcal{L}_2$ 構造を ω モデルという．

ω モデル $(\omega, S, 0, 1, +, \cdot, <)$ は 2 階部分 S によってのみ決まるので，単に S で表す場合が多い[3]．最も代表的な ω モデルは ω のベキ集合 $\mathcal{P}(\omega)$ である．$\mathcal{P}(\omega)$ による解釈では，集合変数に ω の任意の部分集合を値にわりふることができる．$\mathcal{P}(\omega)$ は最も自然な $\mathcal{L}_2$ 構造であり，意図された ω モデルという．

$\mathcal{L}_2$ の形式体系（$\mathcal{L}_2$ 理論）T は $\mathcal{L}_2$ 文の集合によって定められる．その集合に属する $\mathcal{L}_2$ 文は T の公理という．$\mathcal{L}_2$ は 2 種類の変数をもつ言語であるが，変数を区分けするための 1 変数関係記号とそれに伴う公理の書き換え，および，いくつかの公理の導入により，$\mathcal{L}_2$ 理論は 1 階述語論理の形式体系とみなせるものである[4]．T の公理からの論理的帰結になる $\mathcal{L}_2$ 文を T の定理という．文 φ が T の定理であるとき，$T \vdash \varphi$ と書き，T で φ が証明できるという．

$\mathcal{L}_2$ の形式体系 T_1 と T_2 に対して，T_1 のすべての公理が T_2 の定理となるとき，T_1 は T_2 の部分体系といい，$T_1 \subseteq \mathrm{T}_2$ と書く．このとき，T_1 は T_2 より弱いともいう．T_1 が T_2 より弱く，さらに，T_2 の定理で T_1 で証明できないものが存在するとき，T_1 は T_2 より真に弱いという．

$\mathcal{L}_2$ の形式体系 T の公理すべてが真となる $\mathcal{L}_2$ 構造を T のモデルという．T のモデルとなる ω モデルは，T の ω モデルという．$\mathcal{P}(\omega)$ は本章で紹介するすべての形式体系の最大の ω モデルである．また，完全性定理により，任意の文 φ について，

$$T \vdash \varphi \Longleftrightarrow T \text{ の任意のモデル } \mathcal{M} \text{ で } \mathcal{M} \models \varphi$$

---

3)　ここでは，$0, 1, +, \cdot, <$ の ω における標準的解釈もまた，それぞれ $0, 1, +, \cdot, <$ と表している．

4)　なお，等号 $=$ に関する公理はつねに仮定しておく．先の $\mathcal{L}_2$ 構造の定義は，1 階部分が決まれば，そのベキ集合として 2 階部分が自然に決まる 2 階論理としての古典的な解釈のようなものではなく，むしろ，このような 1 階述語論理の言語として，$\mathcal{L}_2$ の解釈を考えていることを意味している．

となる．

定義 1.3 （2 階算術） 2 階算術 Z_2 はつぎの 3 種類の公理からなる $\mathcal{L}_2$ 理論である．

(1) 自然数の順序 $<$ や演算 $+, \cdot$ に関する基本公理[5)]：

$$
\begin{gathered}
m+1 \neq 0, \\
m+1=n+1 \quad \rightarrow \quad m=n, \\
m+0=m, \\
m+(n+1)=(m+n)+1, \\
m \cdot 0=0, \\
m \cdot(n+1)=(m \cdot n)+m, \\
\neg m<0, \\
m<n+1 \in(m<n \vee m=n).
\end{gathered}
$$

(2) 帰納法公理：

$$
\forall X(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \rightarrow n+1 \in X) \rightarrow \forall n(n \in X)).
$$

(3) 内包公理：$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$．ただし $\varphi(n)$ は X を自由変数にもたない論理式である．

ここでは Z_2 の公理を論理式の形で表しているが，それはその論理式の先頭に全称量化記号をつけて文にしたもの (universal closure) を表す．また次節以降，形式体系の公理を具体的に表す場合，同じように全称量化記号を省略し論理式の形で表すことがある．

内包公理は正確には「公理」ではなく公理図式であり，各論理式 φ ごとに一つ定まる無限個の公理を表している．直観的には，$\varphi(n)$ についての内包公理は $\varphi(n)$ によって定義される集合 $X=\{n: \varphi(n)\}$ の存在を保証するものである．ただし，$\varphi(n)$ は X 以外の自由変数をもってよい．この場合，自由

5) 第 I 部第 2 章 2.2 節参照．以下，単に基本公理という．

変数は任意のパラメータとして扱われる．たとえば，$\varphi(n)$ を $n \notin Y$ という論理式だとすると，内包公理

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow n \notin Y)$$

は，与えられた任意の集合 Y に対して，その補集合 X が存在することを主張する．つまり変数 Y はパラメータの役割を果たしている．もう少し正確に説明しよう．$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ を $x, y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m$ 以外の自由変数をもたない $\mathcal{L}_2$ 論理式とする．このとき，φ についての内包公理が $\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M}$ で真になるのは，任意の $b_1, \ldots, b_n \in M$, $A_1, \ldots, A_m \in S_M$ に対し，

$$\{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_n, A_1, \ldots, A_m)\} \in S_M$$

となるときである．つまり，$\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M}$ が (3) の内包公理を満たすのは，何らかのパラメータ付き論理式で $\mathcal{M}$ 上定義可能なすべての集合が S_M に属するときである．

ω モデル $\mathcal{P}(\omega)$ は内包公理を満たす．また，基本公理と帰納法公理は任意の ω モデルで真であるから，$\mathcal{P}(\omega)$ は Z_2 のモデルである．

ところで PA における帰納法公理は無限個の公理からなる公理図式だが，(2) の帰納法公理はただ一つの公理である．しかし，内包公理は定義可能な集合すべての存在を保証するものであるので，Z_2 からつぎの全帰納法 (full-induction) 公理が導かれる[6)]：任意の論理式 $\varphi(n)$ に対して，

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1)) \rightarrow \forall n \varphi(n).$$

任意の $\mathcal{L}_1$ 論理式は $\mathcal{L}_2$ 論理式でもあるので，PA は Z_2 の部分体系である．$\mathcal{L}_2$ の表現力は $\mathcal{L}_1$ よりもはるかに豊かであり，さらに，Z_2 で PA の無矛盾性を証明できる．

Z_2 での数学を展開するとき，本質的な役割を果たすのが内包公理である．そこで，逆数学では，具体的な数学の定理に対して内包公理が実際にどのような役割を果たしているのかを詳細かつ厳密に調べる．このとき，それぞれ

6)　全帰納法公理は公理図式である．

の論理式に対する内包公理を直接扱うのではなく，内包公理を制限することによって特徴付けられる Z_2 の部分体系を調べるほうが都合がよい．次節からは，この観点に立って Z_2 の部分体系を具体的に紹介していこう．

1.2 Π^1_1-CA$_0$ と ACA$_0$

1.2 節では，Z_2 の二つの部分体系 Π^1_1-CA$_0$ と ACA$_0$ について述べる．その前に部分体系の定義に必要な論理式の分類を導入する．

定義 1.4 (Σ^1_k, Π^1_k)　(1) 集合変数に関する量化記号を含まない論理式を算術的論理式という．算術的論理式は，Π^1_0 論理式または Σ^1_0 論理式ともいう．算術的論理式全体の集合を Π^1_0 もしくは Σ^1_0 と表す．

(2) 任意の自然数 $k \in \omega$ に対し，つぎの形の論理式を Π^1_k 論理式という：

$$\forall X_1 \exists X_2 \cdots X_k\, \theta.$$

ここで，θ は算術的論理式，$X_1, X_2, \ldots, X_k$ は集合変数である．Π^1_k 論理式全体の集合を Π^1_k と表す．

(3) 任意の自然数 $k \in \omega$ に対し，つぎの形の論理式を Σ^1_k 論理式という：

$$\exists X_1 \forall X_2 \cdots X_k\, \theta.$$

ただし，θ は算術的論理式，$X_1, X_2, \ldots, X_k$ は集合変数である．Σ^1_k 論理式全体の集合を Σ^1_k と表す．ただし，(2) と (3) の定義に現れる論理式はともに集合変数の量化記号として $\exists$ と $\forall$ が交互にあわせて k 回現れる形であることに注意する．パラメータ付き論理式に対しても同様に定める．

$\neg\forall X\varphi \leftrightarrow \exists X\neg\varphi$, $\neg\exists X\varphi \leftrightarrow \forall X\neg\varphi$, $\varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ より，任意の Π^1_k 論理式はある Σ^1_k 論理式の否定に，また任意の Σ^1_k 論理式はある Π^1_k 論理式の否定に論理的に同値である．また，ダミーの量化記号の付け足しにより，任意の $k \in \omega$ について，

$$\Sigma^1_k \cup \Pi^1_k \subseteq \Sigma^1_{k+1} \cap \Pi^1_{k+1}$$

がわかる．

定義 1.5（Γ 内包公理） Γ を論理式の集合とする．つぎの制限された内包公理を Γ 内包公理という．X を自由変数にもたない Γ に属する任意の論理式 $\varphi(n)$ に対し，

$$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)).$$

定義 1.6（Π^1_k-CA_0） $k \in \omega$ とする．形式体系 Π^1_k-CA_0 とは，つぎの 3 種類の公理からなるものである．

(1) 基本公理．定義 1.3 の (1) と同じもの．

(2) 帰納法公理．

(3) Π^1_k 内包公理．

「Π^1_k-CA_0」の CA は内包公理 (comprehension axiom) の略であり，下付きの 0 は帰納法の制限を表す．Π^1_k-CA_0 では全帰納法は証明できない．任意の $k \in \omega$ について，$\Pi^1_k \subset \Pi^1_{k+1}$ であるから Π^1_k-$\mathrm{CA}_0 \subseteq \Pi^1_{k+1}$-$\mathrm{CA}_0$ である．実際，Π^1_k-CA_0 は Π^1_{k+1}-CA_0 より真に弱い．つまり，Π^1_{k+1}-$\mathrm{CA}_0 \vdash \sigma$ かつ Π^1_k-$\mathrm{CA}_0 \not\vdash \sigma$ となる文 σ が存在する．

同様に Σ^1_k-CA_0 を定めることができるが，補集合の存在は特殊な Π^1_0 内包公理 $\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow n \notin Y)$ によって保証されるので，Σ^1_k-CA_0 と，Π^1_k-CA_0 は等しいことが容易にわかる．つまり両者で証明できる定理は同じである．

$\Pi^1_\infty = \bigcup_{k \in \omega} \Pi^1_k$ とする．簡単な式変換によって，各論理式は Π^1_∞ に属するある論理式と論理的に同値となる．よって，Z_2 の内包公理は Π^1_∞ 内包公理におきかえてもよい．Z_2 を Π^1_∞-CA_0 と表すこともある．

定義 1.7（ACA_0） Π^1_0-CA_0 をとくに ACA_0 という．

ACA は算術的内包公理 (arithmetical comprehension axiom) の略である．帰納法公理と Π^1_0 内包公理から，つぎの算術的帰納法が導かれる：任意の算術的論理式 $\varphi(n)$ に対して，

$$\varphi(0) \wedge \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n \varphi(n).$$

$\mathcal{L}_1$ 論理式は算術的論理式でもあるので，ACA_0 は PA を含む体系である．とくに，ACA_0 の任意のモデルの 1 階部分は PA のモデルとなる．つぎの補題により逆もいえる．

補題 1.8 $\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M}$ は基本公理（定義 1.3(1) と同じもの）と算術的帰納法を満たすとする．このとき，つぎの 2 条件を満たす ACA_0 のモデル $\mathcal{M}'$ が存在する．

(1) $S_M \subseteq S_{M'}$.

(2) $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ は 1 階部分が等しい．

証明 $\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M}$ は基本公理と算術的帰納法を満たすとする．$A \subseteq M$ は，算術的論理式を用いて定義可能である場合，つまり x だけを自由変数にもつあるパラメータ付き算術的論理式 $\varphi(x)$ で $A = \{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi(a)\}$ となるとき，$\mathcal{M}$ 上で算術的に定義可能であるという．ここで $\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M}'$ を $\mathcal{M}$ と 1 階部分が等しく，

$$S_{M'} = \{A \subseteq M : A \text{ は } \mathcal{M} \text{ 上算術的に定義可能 }\}$$

となるようにとる．構成法から $\mathcal{M}'$ が基本公理と帰納法公理を満たし，補題の条件 (1), (2) を満たすのは明らかである．

$\mathcal{M}'$ が Π^1_0 内包公理を満たすことを示す．$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ を $x, y_1, \ldots, y_n, Y_1, \ldots, Y_m$ 以外の自由変数をもたない算術的論理式とする．また，$b_1, \ldots, b_n \in M'$, $B_1, \ldots, B_m \in S_{M'}$ とする．各 B_i は $\mathcal{M}$ 上のあるパラメータ付き算術的論理式 $\varphi_i(x)$ で定義されている．そこで $\varphi'(x)$ を，φ の中のすべての $t \in Y_i$ の形の部分論理式を $\varphi_i(t)$ でおきかえて得られる $\mathcal{M}$ 上のパラメータ付き論理式とする．$\varphi'(x)$ は集合変数に関する量化記号をもたないので算術的である．よって，$\{a \in M : \mathcal{M} \models \varphi'(a)\} \in S_{M'}$，つまり $\mathcal{M}' \models \exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow \varphi'(x))$ である．したがって，$\mathcal{M}' \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \varphi'(x))$ により，$\mathcal{M}' \models \exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow \varphi(x))$ が示せた．以上により $\mathcal{M}'$ は Π^1_0 内包公理を満たす． ■

定理 1.9 $\mathcal{L}_1$ 構造 $\mathcal{M}$ が，ある ACA_0 のモデルの 1 階部分になることと PA のモデルであることは同値である．

証明　ACA_0 のモデルの 1 階部分が PA のモデルとなるのは明らかである．$\mathcal{L}_1$ 構造 $\mathcal{M}$ が PA のモデルならば，基本公理と算術的帰納法を満たす $\mathcal{L}_2$ 構造とみなせる（$S_M = \{\emptyset\}$ を加えて $\mathcal{L}_2$ 構造と考えればよい）．よって補題 1.8 より，$\mathcal{M}$ は 1 階部分の等しい ACA_0 のモデル $\mathcal{M}'$ をもつ．■

完全性定理からつぎのことがいえる．

定理 1.10　$\mathcal{L}_1$ 文が，PA の定理であることと ACA_0 の定理であることは同値である．これを ACA_0 は PA の保存的拡大 (conservative extension) であるという．

再帰理論 (recursion theory) に多少なじみの深い読者のために，ACA_0 の ω モデルの再帰理論的な特徴付けについて述べておこう．$A, B \subseteq \omega$ に対し，

$$A \oplus B = \{2n : n \in A\} \cup \{2n+1 : n \in B\},$$

$$A' (A \text{ のテューリング・ジャンプ}) = \mathbf{K}^A (\text{オラクル } A \text{ をもつ完全 RE 集合})$$

とし，$A^{(n)}$ は A にテューリング・ジャンプを n 回行ったものとする．また A が B にテューリング還元可能，つまり A が B で再帰的 (recursive in B) であることを $A \leq_{\mathrm{T}} B$ と表す．

このとき，集合 $A \subseteq \omega$ に対して，$A_1, \ldots, A_m \subseteq \omega$ のみをパラメータにもつ算術的論理式 $\varphi(x)$ により A が $\mathcal{P}(\omega)$ 上定義できることと，$\exists n \in \omega$ $A \leq_{\mathrm{T}} (A_1 \oplus \cdots \oplus A_m)^{(n)}$ となることは同値である．$\varphi(x)$ は集合に関する量化記号をもたないので，$\mathcal{P}(\omega)$ は，$A_1, \ldots, A_m$ を要素にもつ任意の ω モデルの上での定義可能性におきかえてもよい．よって，算術的集合全体

$$\mathrm{ARITH} = \{A \subset \omega : \exists n \in \omega (A \leq_{\mathrm{T}} \emptyset^{(n)})\}$$

は ACA_0 の最小の ω モデルとなる．一般に ACA_0 の ω モデル S は，$\oplus$ とテューリング・ジャンプという操作で閉じており，「任意の $A, B \subseteq \omega$ に対して，$A \leq_{\mathrm{T}} B$ かつ $B \in S$ ならば $A \in S$」という性質（再帰性で下に閉じているという）を満たすものとして特徴付けられる．

定義 1.11（β モデル） ω モデル S は，任意の（S のパラメータ付き）Π^1_1 文の真偽が，$\mathcal{P}(\omega)$ と同じになるとき β モデルという．形式体系 T のモデルとなる β モデルは，T の β モデルという．

$A, B \subseteq \omega$ とする．$A^{(n)_\mathrm{H}}$ は A にハイパー・ジャンプ [Rogers 1967, p.412] を n 回行ったものとする．また A が B に多対 1 還元可能であることを $A \leq_\mathrm{m} B$ と表す．集合 $A \subseteq \omega$ に対して，$A_1, \ldots, A_l \subseteq \omega$ のみを集合のパラメータにもつ Π^1_1 論理式 $\varphi(x)$ により $\mathcal{P}(\omega)$ 上で A が定義できることと，$A \leq_\mathrm{m} (A_1 \oplus \cdots \oplus A_l)^{(1)_\mathrm{H}}$ は同値である．クリーネの基底定理 [Kleene 1955] より，

$$\{A \subseteq \omega : \exists n \in \omega (A \leq_\mathrm{m} \emptyset^{(n)_\mathrm{H}})\}$$

は Π^1_1-CA_0 の最小の β モデルとなる．一般に，任意の $1 \leq k \leq \infty$ に対し，Π^1_k-CA_0 はそれぞれ最小の β モデルをもつ．しかし，どの $1 \leq k \leq \infty$ でも Π^1_k-CA_0 に最小の ω モデルはない [Quinsey 1980].

Π^1_1-CA_0 は逆数学の研究においては今のところ最も強い体系である．本書では一般の Π^1_k-CA_0 に関することや β モデルなどの ω モデルの一般論は扱わない．[Simpson 1999] の後半部にくわしくまとめられているので参考にするとよい．

1.3 $\mathbf{RCA_0}$

1.3 節では形式体系 RCA_0 について説明する．RCA は再帰的内包公理 (recursive comprehension axiom) の略である．RCA_0 は ACA_0 よりもはるかに弱く，実際，第 1 章で紹介する体系の中では最も弱い．一方で，次章でみるように，多くの数学的主張を意味付けるには十分な強さをもち，逆数学研究のうえで基礎となる体系である．体系の定義の前にまず算術的論理式のつぎの分類を導入する．

定義 1.12（Σ^0_k, Π^0_k） (1) 量化記号がすべて有界量化記号 $(\forall n < t)$, $(\exists n < t)$, $(\forall n \leq t)$, $(\exists n \leq t)$ の形（第 I 部 2.1 節参照）でしか現れない算術的論理

式を有界論理式という：有界論理式は Π^0_0 論理式または Σ^0_0 論理式ともいう．有界論理式全体の集合は単に Π^0_0 もしくは Σ^0_0 と書く．

(2) 任意の $k \in \omega$ に対し，つぎの形の算術的論理式を Π^0_k 論理式という：

$$\forall x_1 \exists x_2 \cdots x_k\, \theta.$$

ただし，θ は有界論理式，$x_1, x_2, \ldots, x_k$ は数変数である．また，Π^0_k 論理式全体の集合は Π^0_k と表す．

(3) 任意の $k \in \omega$ に対し，つぎの形の算術的論理式を Σ^0_k 論理式という：

$$\exists x_1 \forall x_2 \cdots x_k\, \theta.$$

ただし，θ は有界論理式，$x_1, x_2, \ldots, x_k$ は数変数である．また，Σ^0_k 論理式全体の集合は Σ^0_k と表す．ただし，(2) と (3) の定義に現れる論理式はともに数変数の量化記号として $\exists$ と $\forall$ が交互に合わせて k 回現れる形であることに注意する．パラメータ付き論理式に対しても同様に定める．

Π^1_k, Σ^1_k のときと同様に，任意の Π^0_k 論理式はある Σ^0_k 論理式の否定に，任意の Σ^0_k 論理式はある Π^0_k 論理式の否定に論理的に同値であり，任意の $k \in \omega$ について，

$$\Sigma^0_k \cup \Pi^0_k \subseteq \Sigma^0_{k+1} \cap \Pi^0_{k+1}$$

と考えてよい．簡単な式変換によって，各算術的論理式はある $k \in \omega$ のある Π^0_k 論理式と論理的に同値となる．よって，$\Pi^1_0 = \bigcup_{k \in \omega} \Pi^0_k$ と考えてよい．

定義 1.13（Σ^0_1 帰納法） つぎの拡張された帰納法公理を Σ^0_1 帰納法という：任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(n)$ に対し，

$$\varphi(0) \land \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1)) \to \forall n \varphi(n).$$

定義 1.14（再帰的内包公理） つぎの制限された内包公理を Δ^0_1 内包公理，もしくは再帰的内包公理という：X を自由変数にもたない任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(n), \psi(n)$ に対し，

$$\forall n(\varphi(n) \leftrightarrow \neg\psi(n)) \to \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)).$$

RCA_0 とはつぎのような体系である.

定義 1.15（RCA_0） RCA_0 はつぎの 3 種類の公理からなる.

(1) 基本公理. (2) Σ^0_1 帰納法[7]. (3) Δ^0_1 内包公理.

S を Δ^0_1 内包公理を満たす ω モデルとし，$A_1, \ldots, A_m \in S$ とする．集合 $A \subseteq \omega$ が，集合 $A_1, \ldots, A_m$ のみをパラメータにもつ Σ^0_1 論理式で S 上で定義できることと，$A_1, \ldots, A_m$ で RE[8]であることは同値である．ポストの定理より，$A_1, \ldots, A_m$ で再帰的であることと，自分自身とその補集合がともに $A_1, \ldots, A_m$ で RE となることは同値である．したがって，Δ^0_1 内包公理は，S に属する $A_1, \ldots, A_m$ で再帰的な集合が再び S に属することを保証する．Δ^0_1 内包公理が再帰的内包公理といわれる所以である.

このように，S が RCA_0 の ω モデルであることは「任意の $A \subseteq \omega$ と $A_1, \ldots, A_m \in S$ に対し，A が $A_1, \ldots, A_m$ で再帰的ならば $A \in S$」が成り立つことと同値ある．とくに，再帰的集合全体

$$\mathrm{REC} = \{A \subseteq \omega : A \leq_{\mathrm{T}} \emptyset\}$$

は RCA_0 の最小の ω モデルとなる．一般に RCA_0 の ω モデルは $\oplus$ に関して閉じていて，かつ $\leq$ に関して下に閉じているものとして特徴付けられる．$\emptyset' \notin \mathrm{REC}$ なので REC は ACA_0 のモデルではない．したがって，RCA_0 は ACA_0 より真に弱いことがわかる.

以降の議論のために RCA_0 で証明できる基礎的な事柄をここで確認しておこう．$\forall n(n \in X)$ となるただ一つの集合を $\mathbb{N}$ と書く．$\mathbb{N}$ は（形式体系の枠内の）自然数全体の集合を表し，論理式 $x = x$ に対する内包公理で存在が示

---

7) RCA_0 には帰納法公理（定義 1.3(2)）ではなく Σ^0_1 帰納法が公理として含まれていることに注意する．Σ^0_1 帰納法を帰納法公理におきかえると，RCA_0 より真に弱い体系になる．このような体系では後で述べるような基本的な事柄すら証明できないため逆数学の立場からは望ましくない．なお歴史的な背景として，数学的帰納法を制限した体系をフリードマン [Friedman 1976] が最初に導入したとき，彼は集合変数ではなく関数変数をもつ言語を使って定義した．また，基本公理として原始再帰法や μ 演算に対応する公理を含めている．そのため，対応する体系を現代ふうに改めるには RCA_0 の場合 Σ^0_1 帰納法が必要になる.

8) 第 I 部 1.4 節参照.

される[9]．順序 $<$ の線形性，和や積の可換性や順序の保存性などの基本性質は PA で証明できる．また，第 I 部 5.1 節で PA にはすべての原始再帰的関数の記号と公理が入っていると考えてもよいと述べられている．これらの事実を示すには PA の数学的帰納法公理を Σ^0_1 になる $\mathcal{L}_1$ 論理式の帰納法に制限しても成り立つ[10]．したがって，RCA_0 でも自然数の演算と順序に関する基本的な性質は証明できるし，すべての原始再帰的関数の記号と公理が入っていると考えてもよい．また第 I 部 5.1 節で述べられているように，これらの関数記号が入った論理式に対しても，Σ^0_k, Π^0_k, Σ^1_k, Π^1_k を同じに考えてよいことに注意しよう[11]．今後，これらの事実は暗黙のうちに使うことにする．

有限列（のコード）全体の集合を $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ と表す．$\sigma \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対し，σ の「長さ」を $\mathrm{lh}(\sigma)$ と表し，「σ の i 番目の値」は $\sigma(i)$ と表す．また，それらのことをまとめて $\sigma = \langle \sigma(0), \ldots, \sigma(\mathrm{lh}(\sigma)-1) \rangle$ とか $\sigma = \langle \sigma(i) : i < \mathrm{lh}(\sigma) \rangle$ と表す[12]．

$\sigma, \tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ に対し，連接 (concatenation)

$$\langle \sigma(0), \ldots, \sigma(\mathrm{lh}(\sigma) - 1), \tau(0), \ldots, \tau(\mathrm{lh}(\tau) - 1) \rangle$$

を $\sigma^\frown\tau$ と表し，σ が τ の始切片 (initial segment)，すなわち，$\mathrm{lh}(\sigma) \leq \mathrm{lh}(\tau)$ かつ $(\forall i < \mathrm{lh}(\sigma))(\sigma(i) = \tau(i))$ であることを $\sigma \subseteq \tau$ と書く．

定義 1.16（関数）　RCA_0 でつぎが定義できる．X と Y は集合とする．

(1) $X \times Y$ は，$n \in X$ かつ $m \in Y$ となるような (n, m) 全体の集合と定義する．すなわち，$\exists n \leq k \exists m \leq k(n \in X \wedge m \in Y \wedge (n, m) = k)$ となる k 全体の集合である[13]．

---

9) $\mathbb{N}$ はメタ理論における自然数全体の集合 ω と区別されなくてはならない．RCA_0 のモデル $\mathcal{M}$ において，$\mathbb{N}$ の M における解釈 $\mathbb{N}_M$ は M である．つまり，$\mathbb{N}_M$ は $\mathcal{M}$ の 1 階領域を表す．ω は ω モデルにおける $\mathbb{N}$ の解釈である．

10) このように帰納法を制限した PA の部分体系を $\mathrm{I}\Sigma_1$ という．$\mathrm{I}\Sigma_1$ については [Hájek and Pudlák 1993] にくわしい．

11) 厳密には Σ^0_0, Π^0_0 については少し状況が異なる．この場合は，再帰的内包公理を使って議論をうまく処理する．

12) ここでいう有限列は，厳密には有限列のコード，すなわち $\mathbb{N}$ の要素である．2.1 節および，第 I 部 5.2 節などの β 関数によるコード化を参照.

13) (n, m) はペアリング関数（第 I 部 1.5 節の "pair"）である．Δ^0_1 内包公理により $X \times Y$ は存在する．

(2) 関数 $f : X \to Y$ は，集合 $f \subseteq X \times Y$ で，$\forall x \forall y_0 \forall y_1((x, y_0) \in f \wedge (x, y_1) \in f \to y_0 = y_1)$ かつ $\forall x \in X \exists y \in Y(x, y) \in f$ を満たすものをいう．$(x, y) \in f$ のとき $f(x) = y$ と書く．

関数 $f : \mathbb{N} \to X$ を X の要素による数列という．数列 f を $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ と書くこともある．ただし，$a_n = f(n)$ である．

定義 1.17（k 変数関数） RCA_0 でつぎが定義できる．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{lh}(\sigma) = k$ となる有限列 σ 全体の集合を $\mathbb{N}^k$ とする．関数 $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ を k 変数関数といい，$\sigma = \langle n_1, \ldots, n_k \rangle$ のとき $f(\sigma)$ を $f(n_1, \cdots, n_k)$ と書く．

RCA_0 において，長さ $m \in \mathbb{N}$ の k 変数関数の有限列も $\mathbb{N}^k$ から $\mathbb{N}^m$ への関数で定めることができる．このようにして定まる関数は，関数の合成や原始再帰法，最小化法（μ 演算）で閉じていることが RCA_0 で示せる．ここでは結果だけ述べておく．

定理 1.18 RCA_0 でつぎが成り立つ．

(1)（合成）関数 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に対して，$h(n) = g(f(n))$ で定まるような関数 $h : X \to Z$ が存在する．

(2)（原始再帰法）関数 $f : X \to Y$ と $g : \mathbb{N} \times X \times Y \to Y$ に対して，

$$h(0, m) = f(m) \text{ かつ } h(n+1, m) = g(n, m, h(n, m))$$

で定まる関数 $h : \mathbb{N} \times X \to Y$ が存在する．

(3)（最小化）関数 $f : X \times Y \to \mathbb{N}$ は $\forall m \in Y \exists n \in X(f(n, m) = 0)$ を満たすとする．このとき，

$$g(m) = \text{「}f(n, m) = 0 \text{ を満たす最小の } n\text{」}$$

で定まる関数 $g : Y \to X$ が存在する．

最後に，これらのことを用いて，RE 集合は再帰的関数の値域として表せることやクリーネの標準化定理に対応するものが RCA_0 で証明できることを記しておく．

定理 1.19 RCA_0 でつぎが証明できる．任意の無限集合 X に対し，全射となる狭義単調増加関数 $f:\mathbb{N}\to X$ が存在する．

定理 1.20 $\varphi(n)$ を X も f も自由変数に含まない Σ^0_1 論理式とする．RCA_0 でつぎが証明できる．$\forall n(\varphi(n)\leftrightarrow n\in X)$ となる有限集合 X が存在するか，もしくは，$\forall n(\varphi(n)\leftrightarrow\exists m(f(m)=n))$ となる単射 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が存在する．

Σ^0_1 論理式による集合の存在公理は RCA_0 にない．したがって RCA_0 では定理 1.20 の f の値域の存在は保証できない．

定理 1.21（クリーネの標準化定理） $\varphi(X)$ を Σ^0_1 論理式とする．このとき Σ^0_0 論理式 $\theta(m)$ で RCA_0 においてつぎが証明できるものがある．

$$\forall X(\varphi(X)\leftrightarrow\exists n\theta(X[n])).$$

ただし，$X[n]=\langle\chi_X(0),\ldots,\chi_X(n-1)\rangle$ で χ_X は X の特性関数である．

これまで紹介した形式体系 Z_2, …, Π^1_k-CA_0, …, Π^1_1-CA_0，ACA_0, RCA_0 は Z_2 が一番強く右へいくにしたがい弱くなる．逆数学では右端の三つの体系 Π^1_1-CA_0, ACA_0, RCA_0 がとくに重要である．次節では，さらにこれら三つの体系の中間にあたる体系を紹介する．

1.4 $\mathbf{WKL_0}$ と $\mathbf{ATR_0}$

本節で紹介する二つの体系 WKL_0 と ATR_0 は逆数学研究を通してはじめてその重要性が意識された体系である．まず，WKL_0 について述べる．WKL は弱ケーニヒの補題 (weak König's lemma) の略である．

定義 1.22（ケーニヒの補題） RCA_0 でつぎが定義できる．$T\subseteq\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ は，その各要素のすべての始切片が再び T の要素となるとき，すなわち $\forall\sigma\in T(\forall\tau\subseteq\sigma)(\sigma\in T)$ であるとき，木 (tree) という．

木 T に対して，関数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ は $\forall n(f[n]\in T)$ となるとき，すなわち

T に含まれる無限の一本道を表すとき，単に T の道 (path) という．ここで，$f[n] = \langle f(0), \ldots, f(n-1) \rangle$ である．

0 または 1 だけを値にとる有限列（のコード）全体の集合を $2^{<\mathbb{N}}$ とする．$2^{<\mathbb{N}}$ の部分集合となる木を 0-1 木という．

「有限枝分かれの無限木は必ず道をもつ」という主張をケーニヒの補題といい，「無限 0-1 木は必ず道をもつ」という主張を弱ケーニヒの補題という．

定義 1.23 RCA_0 に弱ケーニヒの補題を加えた体系を WKL_0 という[14]．

定義 1.24（Γ 分離原理） Γ を論理式の集合とする．つぎの公理図式を Γ 分離原理（Γ-SP）という．

$$\forall n \neg(\varphi(n) \wedge \psi(n)) \to \exists X \forall n\{(\varphi(n) \to n \in X) \wedge (\psi(n) \to n \notin X)\}.$$

ただし，$\varphi(n), \psi(n)$ はどちらも X を自由変数として含まない Γ に属する論理式とする．

定理 1.25 RCA_0 でつぎの二つは同値である．

(1) WKL_0．　(2) Σ^0_1 分離原理．

証明 (1)⇒(2) を示す．WKL_0 で考える．$\varphi_0(n)$, $\varphi_1(n)$ はどちらも X を自由変数として含まない Σ^0_1 論理式とし，$\forall n(\varphi_0(n) \to \neg\varphi_1(n))$ とする．各 $\varphi_i(n)$ は $\theta_i(m,n) \in \Sigma^0_0$ を用いて $\exists m \theta_i(m,n)$ と表せているとする．

このとき無限 0-1 木 $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ をつぎで定める．

$$\tau \in T \Leftrightarrow \forall m, n < \mathrm{lh}(\tau)[(\theta_0(m,n) \to \tau(n) = 0) \wedge (\theta_1(m,n) \to \tau(n) = 1)].$$

弱ケーニヒの補題により T の道 f が存在する．$X = \{n : f(n) = 0\}$ とすると，$\forall n[(\varphi_0(n) \to n \in X) \wedge (n \in X \to \neg\varphi_1(n))]$ となる．

つぎに (2)⇒(1) を示す．RCA_0 で考える．Σ^0_1 分離原理を仮定して，弱ケーニヒの補題を導く．$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ を無限 0-1 木とする．

ここで，主張「σ は 0-1 有限列で，$\{\tau \in T : \sigma^\frown\langle i \rangle \subseteq \tau\}$ が有限である」を

14) RCA_0 にケーニヒの補題を加えた体系は ACA_0 と同じであることが知られている．

$\varphi_i(\sigma)$ と書くことにする $(i=0,1)$．$\varphi_i(\sigma)$ は Σ^0_1 論理式である．ここで $\varphi_i(\sigma)$ は $\exists m\theta_i(m,\sigma)$ $(\theta_i(m,\sigma)\in\Sigma^0_0)$ であるとし，$\varphi'_i(\sigma)$ を

$$\exists m(\theta_i(m,\sigma)\wedge\forall k<m\neg\theta_{1-i}(k,\sigma))$$

とする．このとき，$\forall n\neg(\varphi'_0(n)\wedge\varphi'_1(n))$ となる．Σ^0_1 分離原理により，

$$\forall n\{(\varphi'_0(n)\to n\in X)\wedge(n\in X\to\neg\varphi'_1(n))\}$$

となる X が存在する．この X を使って，0-1 有限列の増加列 $\langle\sigma_n : n\in\mathbb{N}\rangle$ をつぎのように原始再帰的に定義する．σ_0 を空列とする．$\sigma_n\in X$ のとき $\sigma_{n+1}=\sigma_n{}^\frown\langle1\rangle$，そうでないとき $\sigma_{n+1}=\sigma_n{}^\frown\langle0\rangle$ とおく．すると，任意の $n\in\mathbb{N}$ について，$\{t\in T:\sigma_n\subseteq t\}$ は無限集合であり，$\forall n(\sigma_n\in T\wedge\mathrm{lh}(\sigma_n)=n)$ であることは簡単に確かめられる．したがって，$f(n)=\sigma_{n+1}(n)$ で $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を定めれば．f は T の道になる． ■

Σ^0_1 論理式 $\varphi(n),\psi(n)$ が $\forall n(\varphi(n)\leftrightarrow\neg\psi(n))$ を満たせば，Σ^0_1 分離原理により $\exists X\forall n(n\in X\leftrightarrow\varphi(n))$ となる．すなわち，Σ^0_1 分離原理から再帰的内包公理が導ける．この事実を示すのに他のどのような内包公理も必要ない．すなわち，Σ^0_1 分離原理は再帰的内包公理と弱ケーニヒの補題をあわせた公理といえよう．また，明らかに Π^1_0 内包公理から Σ^0_1 分離原理は導くことができる．WKL_0 は RCA_0 と ACA_0 の中間の体系である．

なお再帰的無限 0-1 木で再帰的な道をもたないものがある [Jockusch 1972] ので，REC は WKL_0 のモデルではない．すなわち，WKL_0 は RCA_0 より真に強い体系である．また [Jockusch 1972] により，$\emptyset'\notin S$ となる WKL_0 の ω モデルが存在する．よって WKL_0 が ACA_0 より真に弱いこともわかる．

つぎに ATR_0 について述べよう．ATR_0 は ACA_0 と Π^1_1-CA_0 の中間の体系であり，ATR は算術的超限再帰 (arithmetical transfinite recursion) の略である．算術的超限再帰について述べる前に，算術的超限帰納法について述べよう．算術的超限帰納法とは，与えられた整列集合に沿った算術的な性質についての超限帰納法である．

定義 1.26（整列順序） RCA_0 でつぎが定義できる．$\mathbb{N}$ 上の 2 項関係 $X \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ は（等号付き）順序関係であるとする．X の領域を $\mathrm{field}(X) = \{i : (i,i) \in X\}$ とする．文脈上 $i \in \mathrm{field}(X)$ であることが明らかなときは $\mathrm{field}(X)$ は省略することもある．この X で決まる順序を $\leq_X$ と書く．すなわち，$i \leq_X j$ は $(i,j) \in X$ のことである．また，$i <_X j$ は $i \leq_X j$ かつ $i \neq j$ のこととする．

X は無限下降列をもたない，つまり，$\forall n \in \mathbb{N}(f(n+1) <_X f(n))$ となる関数 $f : \mathbb{N} \to \mathrm{field}(X)$ が存在しないとき整礎 (well-founded) という．整礎な全順序 X を可算整列順序 (countable well-ordering) という．

「X は全順序である」という主張は Π^0_1 であり「X は可算整列順序である」という主張は Π^1_1 である．

補題 1.27（算術的超限帰納法） $\varphi(j)$ を算術的論理式とする．このとき ACA_0 でつぎが証明できる．X が可算整列順序のとき，$\forall j((\forall i <_X j)\varphi(i) \to \varphi(j))$ ならば $\forall j \varphi(j)$ である．

証明 ACA_0 で考える．$\forall j\varphi(j)$ でないとして矛盾を導く．$\forall j\varphi(j)$ でないとすると算術的内包公理より $\forall j(j \in Y \leftrightarrow \neg\varphi(j))$ となる $Y \neq \emptyset$ が存在する．超限帰納法の仮定により，$j \in Y$ ならば $i \in Y$ となる $i <_X j$ が存在する．よって，$j_0 \in Y$ を 1 つとると，原始再帰法により

$f(0) = j_0$,

$f(n+1) = i <_X f(n) \wedge i \in Y$ となる（自然数として）最小の i,

を満たす，関数 $f : \mathbb{N} \to Y$ が存在する．f は明らかに X の無限下降列であり，これは X が整列であることに反する． ■

$\varphi(x, Y)$ を x と Y を自由変数にもつ算術的論理式とする．φ は，集合 A を集合 $\{n : \varphi(n, A)\}$ にかえる操作とみなせる．与えられた可算整列順序に沿ってこの操作を超限回くり返すことによって得られる集合の存在を保証するのがつぎの算術的超限再帰である．

定義 1.28（算術的超限再帰） (1) $\theta(x, Y)$ を算術的論理式とする．このとき，$\mathrm{H}_\theta(X, Y)$ をつぎを表す論理式とする：

$$X \text{ は全順序で } Y = \{(n,j) : \theta(n, Y^j)\}.$$

ただし，Y^j は $\{(m,i) \in Y : i <_X j \wedge (m,i) \in Y\}$ のことである[15)].

(2) つぎの公理図式を算術的超限再帰という：

$$\forall X(X \text{ が可算整列順序ならば } \exists Y \mathrm{H}_\theta(X,Y)).$$

ここで θ は算術的論理式である．

定義 1.29 ACA_0 に算術的超限再帰公理を加えた体系を ATR_0 という．

$\{(m,n) : m \in \emptyset^{(n)}\} \notin \mathrm{ARITH}$ より，ARITH は ω に沿った算術的超限再帰を満たさないので，ATR_0 のモデルではない．よって，ATR_0 は ACA_0 より真に強い体系である．また，任意の β モデルは ATR_0 の ω モデルとなっている．

算術的超限再帰は Π^1_1-CA_0 で証明できるので ATR_0 は Π^1_1-CA_0 の部分体系である．さらに，Π^1_1-CA_0 から β モデルの存在，すなわち ATR_0 の無矛盾性が証明できる．よって，不完全性定理により ATR_0 は Π^1_1-CA_0 より真に弱い．

定理 1.30 RCA_0 においてつぎの二つは同値である．

(1) ATR_0.　(2) Σ^1_1 分離原理.

証明 アイデアはこうである．(1)⇒(2) について．ATR_0 で考える．$\varphi_0(n)$, $\varphi_1(n)$ はどちらも X を自由変数として含まない Σ^1_1 論理式とし，$\neg\exists n(\varphi_0(n) \wedge \varphi_1(n))$ とする．$\langle X_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を互いに相異なる集合の列とする．ここで，任意の Σ^1_1 論理式 $\varphi(X)$ はカントル空間 $2^{\mathbb{N}}$ 上の解析集合に対応する[16)]ことに注目して，$i = 0, 1$ に対し，$\exists n(X = X_n \wedge \varphi_i(n))$ という Σ^1_1 論理式 $\psi_i(X)$ を

15) $\theta(x, Y)$ は x, Y 以外の自由変数をもってもよい．その場合，それらは内包公理のときと同じく任意のパラメータを意味する．

16) $2^{\mathbb{N}}$ 上の解析集合 A やボレル集合 B は，正確にはコードによって表されている．「$X \in A$」や「$X \in B$」といった記述を考えるとき，この記号 $\in$ は体系の中に存在する記号の $\in$ ではなく「$X \in A$」はそのような意味を与える論理式である．Σ^1_1 論理式が解析集合に対応するという意味は，論理式 $\varphi(X)$ が，Σ^1_1 であることと，適切な解析集合 A のコードによって「$X \in A$」を表すものであるということが同じということである．

考え，ルージンの分離定理「共通部分をもたない二つの解析集合はボレル集合で分離できる」を用いる．ルージンの分離定理は ATR_0 で証明できる．このとき，ψ_0 と ψ_1 を分離するようなボレル集合 B は Δ^1_1 論理式に対応[17)]し，ここから ATR_0 を用いて $\forall n(n \in X \leftrightarrow X_n \in B)$ となる集合 X の存在を示す．

(2)⇒(1) について．Σ^1_1 分離原理から Π^1_0 内包公理がでるので，ACA_0 で考えてよい．X を可算整列順序とし，θ を算術的論理式とする．ここで，論理式 $\mathrm{H}_\theta(X,Y)$ を少し変形し，この θ による集合の変換を X に沿ってちょうど $j \in \mathrm{field}(X)$ まで行ったところで止めたものが Z であるような意味の論理式を $\mathrm{H}_\theta(j,X,Z)$ と書くことにしておく．つまり，$\mathrm{H}_\theta(X,Y)$ ならば，$\mathrm{H}_\theta(j,X,Y^j)$ となっていて，$\mathrm{H}_\theta(j,X,Z)$ となる Z は高々一つである．ここで，二つの Σ^1_1 論理式 $\varphi_0(m)$, $\varphi_1(m)$ をそれぞれ

$$\exists Y(\mathrm{H}_\theta(j,X,Y) \wedge \theta(n,Y)),$$
$$\exists Y(\mathrm{H}_\theta(j,X,Y) \wedge \neg\theta(n,Y))$$

と定める．ただし $m = (n,j)$ とする．よって，Σ^1_1 分離原理を用いると

$$\forall n\{(\varphi_0(m) \to m \in Z) \wedge (m \in Z \to \neg\varphi_1(m))\}$$

となる集合 Z が存在する．このとき $Y = \{(n,j) : (n,j) \in Z \wedge j \in \mathrm{field}(X)\}$ は $\mathrm{H}_\theta(X,Y)$ を満たすことが（X に沿った算術的超限帰納法を用いて）示せる． ■

定理 1.25，1.30 より，$\mathrm{WKL}_0 = \mathrm{RCA}_0 + \Sigma^0_1\text{-SP}$, $\mathrm{ATR}_0 = \mathrm{RCA}_0 + \Sigma^1_1\text{-SP}$ である．$\mathrm{ACA}_0 = \mathrm{RCA}_0 + \Pi^0_1\text{-CA}$ であることなどを考えると，

$$\frac{\mathrm{ACA}_0}{\Pi^1_1\text{-CA}_0} \approx \frac{\mathrm{WKL}_0}{\mathrm{ATR}_0} \approx \frac{\mathrm{RCA}_0}{\Delta^1_1\text{-CA}_0}$$ [18)]

---

17) すなわち，自分もその補集合も Σ^1_1 論理式に対応する．

18) ACA_0 につぎの制限された内包公理を付け加えた体系を $\Delta^1_1\text{-CA}_0$ という．X を自由変数にもたない任意の Σ^1_1 論理式 $\varphi(n)$, $\psi(n)$ に対し，

$$\forall n(\varphi(n) \leftrightarrow \neg\psi(n)) \to \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n)).$$

といった類似関係が想像できる．実際，このような対比において WKL_0 と ATR_0 は非常によく似た性質をもつ．たとえば，WKL_0 と ATR_0 はともに最小の ω モデルをもたず，WKL_0 のすべての ω モデルの共通集合は RCA_0 の最小の ω モデル REC であり，ATR_0 のすべての ω モデルの共通部分は Δ^1_1-CA_0 の最小の ω モデル

$$\mathrm{HYP} = \{A \subseteq \omega : A \text{ は超算術的集合である}\}$$

である．

第 1 章では，逆数学研究において重要な役割を果たす 2 階算術 Z_2 の五つの部分体系 RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 について概観した．これらの体系は，主に Z_2 の内包公理を制限することによって定義された．1.2 節以降でみたようにその制限はきわめて自然なものである．また，それらは数学の基礎付けに関する何らかの立場に対応する体系とみなされる場合がある [Feferman 1998; Simpson 1999].

第 2 章では以上の知識を前提に具体例をあげながら逆数学のありさまについてみていくことにしよう．

第2章

数学の展開と逆数学

第2章では具体的な例をあげていきながら実際にどのようにして逆数学の研究がなされているのかをみていく．第2章の構成は大きく二つに分かれている．

まず2.1節で基本体系としての RCA_0 の役割をみる．すなわち，古典的数学[1)]の各主張に現れる概念がそれぞれ RCA_0 においてどのように定義されるかをみていく．RCA_0 は非常に弱い体系であるが，多くの数学的概念を定めることができる．

つぎに2.2節で第II部の主題である逆数学について解説する．ここでは，序で述べた逆数学の原則とその大枠についてもう一度確認し，さらに体系の弱いものから順に WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 とそれぞれの逆数学の結果とその特徴について紹介する．

2.1　コードと $\mathbf{RCA}_0$ 上の数学

ヒルベルトとベルナイスの研究 [Bernays and Hilbert 1968–1970] 以来，古典的数学の大部分は2階算術 Z_2 で展開されることがわかった．このときに直接扱える対象は自然数と自然数からなる集合だけである．つまり，言語 $\mathcal{L}_2$ による制限から，Z_2 で実際に数学を展開する場合，それ以外の数学的対象，たとえば実数や連続関数などといったさまざまな対象を自然数もしくは自然

1)　第II部序を参照．

数からなる集合を使って表すということを考えなくてはならない．このような「翻訳」をコード化といい，数学的概念 A をコード化したものを A のコードという[2]．

コード化を通して，Z_2 の非常に制限された体系 RCA_0 でもさまざまな数学概念を定義できる．概念を定義する限りにおいては，RCA_0 は十分に強い体系である．2.1 節では，その具体例として，完備可分距離空間やその上の連続関数などが RCA_0 で定義できることを述べよう．

自然数の演算と順序に関する基本性質や再帰的関数に関する基本性質は RCA_0 でも証明できることはすでに 1.3 節で述べた．そこでつぎに，デデキントにならって整数と有理数を定義する．ただし，整数と有理数は同値類ではなく代表元で定めていることに注意する[3]．

RCA_0 でつぎが定義できる．$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上の同値関係 $\equiv_\mathbb{Z}$ を $(m,n)\equiv_\mathbb{Z}(k,l)\leftrightarrow m+l=k+n$ によって定める．自然数のペア (m,n) は厳密にはペアリング関数によって与えられている一つの自然数である．$\equiv_\mathbb{Z}$ の各同値類において，このような自然数としての最小数を代表元としてとり，これを整数（のコード）と呼ぶ．再帰的内包公理から，整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は存在する．

ここで，整数 $(m,n)\in\mathbb{Z}$ は普通「$m-n$」で表される数に対応する．$(0,0)$ は整数としての「0」のことであり $(1,0)$ は整数としての「1」である．そこで，これらもやはり $0,1$ と書くことにする．$\mathbb{Z}$ 上の演算は，$(k,l)+_\mathbb{Z}(m,n)=(k+m,l+n)$, $(k,l)-_\mathbb{Z}(m,n)=(k+n,l+m)$, $(k,l)\cdot_\mathbb{Z}(m,n)=(km+ln,kn+lm)$ などで定める．$\mathbb{Z}$ 上の順序関係 $<_\mathbb{Z}$ は $(m,n)<_\mathbb{Z}(k,l)\leftrightarrow m+l<k+n$ で定義する．これらも整数の普通の和・差・積や順序に対応していることはわかるだろう．添字の $\mathbb{Z}$ は省略して $+,-,\cdot,<$ と書く．$\mathbb{Z}$ は順序環としての基本性質を満たすことが RCA_0 で示せる．

整数の場合と同様に，有理数も整数の組として以下のように定義する．$\mathbb{Z}_+$ を正の整数全体の集合とする．$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+$ 上の同値関係 $\equiv_\mathbb{Q}$ を $(k,l)\equiv_\mathbb{Q}(m,n)\leftrightarrow k\cdot_\mathbb{Z}n=l\cdot_\mathbb{Z}m$ によって定める．$\equiv_\mathbb{Q}$ の各同値類において，自然数としてみた

---

2)　第 1 章で述べた関数 $f:X\to Y$ などもそうである．

3)　整数全体のなす集合 $\mathbb{Z}$ や有理数全体のなす集合 $\mathbb{Q}$ の存在を（$\mathbb{N}$ の部分集合として）保証するために，各整数や有理数は自然数でコードする必要があるからである．

ときの最小数[4]を代表元としてとり，これを有理数（のコード）と呼ぶ．再帰的内包公理から，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は存在する．

有理数 $(m,n) \in \mathbb{Q}$ は普通 m/n で表される数に対応する．$\mathbb{Q}$ 上の演算は，$(k,l) +_{\mathbb{Q}} (m,n) = (k \cdot_{\mathbb{Z}} n +_{\mathbb{Z}} l \cdot_{\mathbb{Z}} m, l \cdot_{\mathbb{Z}} n), (k,l) \cdot_{\mathbb{Q}} (m,n) =_{\mathbb{Q}} (k \cdot_{\mathbb{Z}} m, l \cdot_{\mathbb{Z}} n)$ などで定め，$\mathbb{Q}$ 上の順序関係 $<_{\mathbb{Q}}$ も $(m,n) <_{\mathbb{Q}} (k,l) \leftrightarrow m \cdot_{\mathbb{Z}} l < k \cdot_{\mathbb{Z}} n$ で定義する．これらは，有理数の普通の演算や順序に対応していることがわかる．$\mathbb{Z}$ の場合と同じく添字の $\mathbb{Q}$ は省略したり，0, 1, -2, 1/5 といった普通の表記を用いる．$\mathbb{Q}$ は順序体としての基本性質を満たすことが RCA_0 で示せる．

実数は有理数のコーシー列によって定義する．

定義 2.1（実数）　RCA_0 でつぎが定義できる．有理数列 $\alpha = \langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ は

$$\forall n \forall i (|q_n - q_{n+i}| \leq 2^{-n})$$

を満たすとき，実数（のコード）という．

実数は 2^{-n} の度合で収束するコーシー列として定義されている．このように収束度合を明記する形で定義することで，実数に関するさまざまな性質を RCA_0 で証明することができる[5]．

有理数列 α が実数であることを $\alpha \in \mathbb{R}$ と書く．$\mathbb{R}$ は便宜的に用いられる記号で，$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ と違い，厳密にはわれわれがここで実際に扱う意味の集合（$\mathbb{N}$ の部分集合）ではない．各実数 α 自身が $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}$ への関数，つまり集合であり，$\alpha \in \mathbb{R}$ は集合に関するある特定の Π^0_1 論理式の略である．

RCA_0 において，実数上の等号，不等号はそれぞれつぎで定義する．実数 $\alpha = \langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ と $\beta = \langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ に対して，

$$\alpha =_{\mathbb{R}} \beta \leftrightarrow \forall n (|p_n - q_n| \leq 2^{-n+1}),$$
$$\alpha <_{\mathbb{R}} \beta \leftrightarrow \exists n (q_n - p_n > 2^{-n+1}).$$

これが普通の実数の等号や不等号に対応するのは明らかだろう．$\mathbb{Q}$ の場合と同じく $=_{\mathbb{R}}$, $<_{\mathbb{R}}$ の添字 $\mathbb{R}$ は省略し単に $=$, $<$ などと書く．ここで少し注意が

4)　整数は自然数でコードされているので，整数の組もまた自然数でコードされている．
5)　このような収束度合の明記のない定義だと，きわめて基本的な事柄さえ RCA_0 では扱えなくなる．

必要である．実数自身が有理数の集合であるから，これまでのように $=_{\mathbb{R}}$ による同値類（有理数の集合の集合）をとったり適当な代表元をとるような操作はできない．ここでは「同値関係」そのままを実数の等号とみなす．このように「同じ」実数であっても，実際にはたくさんの（有理数列としての）コードをもつ．$\alpha \in \mathbb{R}$ と同じく，$\alpha = \beta$ もある特定の Π^0_1 論理式の略であり，$\alpha < \beta$ も Σ^0_1 論理式の略である．

RCA_0 において，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ に自然に埋め込むことができる．すなわち，$q \in \mathbb{Q}$ と，q の無限列 $\langle q : n \in \mathbb{N} \rangle$ を同一視するのである．$\alpha = q$ となる $q \in \mathbb{Q}$ をもつ実数もやはり有理数という[6]．

RCA_0 において，実数 $\alpha = \langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ と $\beta = \langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ の和，積はつぎで定義する．

$$\alpha + \beta = \langle p_{n+1} + q_{n+1} : n \in \mathbb{N} \rangle,$$

$$\alpha \cdot \beta = \langle p_{n+m_0} \cdot q_{n+m_0} : n \in \mathbb{N} \rangle.$$

ここで，m_0 は $|p_0| + |q_0| + 2 \leq 2^m$ となる最小の m とする．

三角不等式による簡単な計算から上の定義の右辺が実数の条件を満たすことや実数の演算として "well-defined" であることがわかる．和と積の定義の右辺の $+1$ や $+m_0$ は実数の定義を満たすための微調整である．$\mathbb{R}$ がアルキメデス順序体となること，また実閉体であることなどが RCA_0 で証明できる．複素数は普通に実数のペアとして定義できよう．このとき複素数全体 $\mathbb{C}$ が代数閉体となることも RCA_0 で証明できる．

ところで，実数の定義にはデデキント切断による定義も考えられる．個々の実数の性質としてはどちらで定義してもまったく同じであることが RCA_0 で示せる．逆数学に関する初期の論文ではデデキント切断による定義を用いているものもある．しかし，実数列のようなものを考えた場合には状況が異なり，基本的な演算においてさえ RCA_0 上では不適切なことがおこる．そのために，実数の定義として上記のようなコーシー列による定義を用いるのである．

6) このように $\mathbb{R}$ における有理数のコードは自然数ではない．

定義 2.2 RCA_0 でつぎが定義できる．関数 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ は，$\alpha_n:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ を $\alpha_n(m)=f(n,m)$ によって定めたとき，各 $\alpha_n:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ が実数となるならば，実数列（のコード）という．この実数列 f を $\langle\alpha_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ と書く．

残念ながら一般的な意味のコーシー列が収束列であることは RCA_0 で証明できない．したがってこの意味では $\mathbb{R}$ は完備でない．しかし，つぎのように収束度合が与えられているコーシー列に対しては収束列となることが示せる．その意味では「完備」である．

定理 2.3 RCA_0 でつぎが証明できる．実数列 $\langle\alpha_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ と実数列 $\langle\beta_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ がつぎの条件を満たすとする．

$$\forall m,n(|\alpha_m-\alpha_{n+m}|\leq\beta_m)\text{ かつ }\lim_{n\to\infty}\beta_n=0.$$

このとき，$\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ となる $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在する．

またこのことからつぎの意味で $\mathbb{R}$ の非可算性もいえる．

定理 2.4 RCA_0 でつぎが証明できる．任意の実数列 $\langle\alpha_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ に対し，$\forall n(\alpha\neq\alpha_n)$ となる $\alpha\in\mathbb{R}$ が存在する．

さて，実数のこのような定義を応用して完備可分距離空間をつぎのように定める．つまり，特定の可算集合 A とその（擬）距離の組から A を完備化したものとして，完備可分距離空間 $\hat{A}$ を定める．

定義 2.5 RCA_0 でつぎが定義できる．空でない集合 $A\subseteq\mathbb{N}$ とつぎの 3 条件を満たす $d:A\times A\to\mathbb{R}$ の組を完備可分距離空間 $\hat{A}$（のコード）であるという[7]：

(1) $d(a,a)=0$,　(2) $d(a,b)=d(b,a)$,　(3) $d(a,b)+d(b,c)\geq d(a,c)$.

$\forall n\forall i(d(a_n,a_{n+i})\leq 2^{-n})$ を満たす A の列 $\langle a_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ を $\hat{A}$ の点といい，$\langle a_n:n\in\mathbb{N}\rangle\in\hat{A}$ と書く．$\hat{A}$ の点 $x=\langle a_n:n\in\mathbb{N}\rangle,y=\langle b_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ に

7) $d:A\times A\to\mathbb{R}$ は，$A\times A$ を添字集合にもつ実数列のことである．

ついて，$d(x,y)=\lim_{n\to\infty} d(a_n,b_n)$ とし，$d(x,y)=0$ で $x=_{\hat{A}} y$ を定義する．$=_{\hat{A}}$ の添字 $\hat{A}$ はよく省略される．

任意の $a\in A$ を $\hat{A}$ の点 $x_a=\langle a:n\in\mathbb{N}\rangle$ と同一視すれば，A は $\hat{A}$ の可算部分集合とみなすことができる．任意の $x=\langle a_n:n\in\mathbb{N}\rangle\in\hat{A}$ について，$\forall n(d(x,a_n)\leq 2^{-n})$ となる．つまり，$\hat{A}$ は「可分」である．定理 2.3 の場合と同じく，$\hat{A}$ の点列 $\langle x_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ と実数列 $\langle r_n:n\in\mathbb{N}\rangle$ が $\forall m,n(m<n\to d(x_m,x_n)\leq r_m)$ と $\lim_{n\to\infty} r_n=0$ を満たせば，$x=\lim_{n\to\infty} x_n$ となる $x\in\hat{A}$ が存在することを RCA_0 で証明できる．この意味で $\hat{A}$ は「完備」である．$\mathbb{Q}$ 上の距離 $d(q,q')=|q-q'|$ によって，$\mathbb{R}$ は完備可分距離空間 $\hat{\mathbb{Q}}$ でもある．

$\mathbb{R}$ と同じように，$\hat{A}$ は集合ではなく，特定の主張を述べるときの略記であり，$\hat{A}$ 上の等号「$=$」もある Π^0_1 論理式で表される「同値関係」である．

集合 $X\subseteq\mathbb{N}$ に対し，$X_n=\{m\in\mathbb{N}:(n,m)\in X\}$ とする．このとき，X は集合列 $\langle X_n:n\in\mathbb{N}\rangle$（のコード）という．

集合列 $\langle A_i:i\in\mathbb{N}\rangle$ と，列 $\langle d_i:i\in\mathbb{N}\rangle$ が，任意の i について (A_i,d_i) が完備可分距離空間の定義を満たすとき，これらの組を完備可分距離空間列 $\langle\hat{A}_i:i\in\mathbb{N}\rangle$（のコード）という．また完備可分距離空間の有限列も自然に定義できる．RCA_0 において，完備可分距離空間の有限列 $\langle\hat{A}_i:i\leq m\rangle$ や無限列 $\langle\hat{A}_i:i\in\mathbb{N}\rangle$ に対し，$\Pi^m_{i=1}A_i$ や $\bigcup^\infty_{m=1}(\Pi^m_{i=1}A_i)$ を用いて，直積空間 $\Pi^m_{i=1}\hat{A}_i$ や $\Pi^\infty_{m=1}\hat{A}_i$ を完備可分距離空間として自然に定めることができる[8)]．このように RCA_0 においても，$\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty$, カントル空間 $2^{\mathbb{N}}=\Pi^\infty_{m=0}\{0,1\}$，ベール空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}=\Pi^\infty_{m=0}\mathbb{N}$ を完備可分距離空間として定めることができる．

なお，カントル空間の要素は $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$，ベール空間の要素は $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ という形の関数にそれぞれ同一視できる．

$\hat{A}$ を完備可分距離空間とする．$\mathbb{Q}^+$ を正の有理数全体の集合とする．$(a,r)\in A\times\mathbb{Q}^+$ を，中心 a, 半径 r の開球 $B(a;r)$（のコード）とする．すなわち，$x\in B(a;r)$ は $d(x,a)<r$ のことである．$\hat{A}$ の開集合はこのような開球の和

8) くわしくは [Simpson 1999, II.5 節] を参照．

集合としてつぎで定義する．

定義 2.6（開集合）　RCA_0 でつぎが定義できる．$\hat{A}$ を完備可分距離空間とする．$U \subseteq \mathbb{N} \times A \times \mathbb{Q}^+$ を $\hat{A}$ の開集合（のコード）という．$x \in \hat{A}$ は，ある $(n, a, r) \in U$ について $x \in B(a; r)$ となるとき，U に属するといい，$x \in U$ と書く．

開集合に関してはつぎの事実が重要である．

補題 2.7　Σ^0_1 論理式 $\varphi(X)$ に対して，RCA_0 でつぎが証明できる．$\hat{A}$ を完備可分距離空間とする．任意の $x, y \in \hat{A}$ に対して，$\varphi(x)$ かつ $x = y$ ならば，$\varphi(y)$ であるとする．このとき，$\forall x \in \hat{A}(x \in U \leftrightarrow \varphi(x))$ となる開集合 U が存在する．

閉集合のコードはその補集合となる開集合のコードで定めればよい[9]．

完備可分距離空間上の関数を一般的に定義することはできない．しかし，連続関数はつぎのようにして定めることができる．

定義 2.8（連続関数）　RCA_0 でつぎが定義できる．$\hat{A}, \hat{B}$ を完備可分距離空間とする．$\Phi_f \subseteq \mathbb{N} \times A \times \mathbb{Q}^+ \times B \times \mathbb{Q}^+$ はつぎの 4 条件を満たすとき，連続関数 $f : \hat{A} \to \hat{B}$（のコード）という．

(1) $((a, r)\Phi_f(b, s)$ かつ $(a, r)\Phi_f(b', s'))$ ならば，$d(b, b') \le s + s'$.

(2) $((a, r)\Phi_f(b, s)$ かつ $d(b, b') + s < s')$ ならば，$(a, r)\Phi_f(b', s')$.

(3) $((a, r)\Phi_f(b, s)$ かつ $d(a, a') + r' < r)$ ならば，$(a', r')\Phi_f(b, s) \in \Phi_f$.

(4) 任意の $x \in \hat{A}$ と正の実数 ϵ について，$(d(x, a) < r \wedge s < \epsilon)$ となる $(a, r)\Phi_f(b, s)$ が存在する．

ここで，$(a, r)\Phi_f(b, s)$ は $\exists n((n, a, r, b, s) \in \Phi_f)$ のことである．

上の 4 条件は，Φ_f によって定まる連続関数 $f : \hat{A} \to \hat{B}$ に対して，$\{(a, r, b, s) : (a, r)\Phi_f(b, s)\}$ が $\{(a, r, b, s) : f(B(a; r)) \subseteq \overline{B(b; s)}\}$ の部分集合として，各 $x \in \hat{A}$ について値 $f(x) \in \hat{B}$ を決めるのに十分なものを集めたときに，満たすべき条件を述べたものである（$\overline{B(b; s)}$ は中心 b，半径 s の閉球を表す）．2

9)　すなわち，開集合のコードは閉集合のコードでもある．

階算術の枠を離れて素朴に考えれば，これで連続関数を定めることができるのは容易にわかる[10)]．

連続関数 $f:\hat{A}\to\hat{B}$ すなわち Φ_f が定義 2.8 の 4 条件を満たすならば，各 $x\in\hat{A}$ について，「$(a,r)\Phi_f(b,s)$ となる任意の a,r,b,s について，$(d(x,a)<r\to d(y,b)\le s)$」となる $y\in\hat{B}$ がただ一つ存在することが RCA_0 で示せる．この y は $f(x)$ のことである．

RCA_0 で初等的関数をはじめ多くの連続関数を定義することができる．しかし $[0,1]$ 上の連続関数が一様連続であることなど，最も基本的な性質のいくつかは RCA_0 では証明できない．それらを示すためには，再帰的内包公理よりも強い集合存在公理が必要となる．

（可算の）環や体は比較的そのままの形で RCA_0 で定義できる．ここでは代表例として代数閉体の定義を述べておく．

定義 2.9 RCA_0 でつぎが定義できる．可算体（のコード）はつぎのものからなる．$\mathbb{N}$ の空でない部分集合 $|K|$．$|K|$ 上の 2 項演算 $+^K$, $\cdot^K$，1 項演算 $-^K$ と $|K|$ の異なる 2 元 0^K, 1^K．ただし，$(|K|,+^K,-^K,\cdot^K,0^K,1^K)$ は通常の体の公理を満たすものである．多項式環 $K[x]$ は，$n=0$ または $a_n\neq_K 0^K$ である $|K|$ の有限列 $\langle a_0,\ldots,a_n\rangle$ 全体の集合によって定める．このとき $\langle a_0,\ldots,a_n\rangle$ は $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ と表す．定数でない任意の多項式 $p(x)\in K[x]$ に対し，$p(a)=0$ となる $a\in|K|$ が存在するとき，K は代数閉体という．

定義 2.10 RCA_0 でつぎが定義できる．K を可算体とする．このとき，つぎの性質をもつ単射準同型 $h:K\to\tilde{K}$ をもつ代数閉体 $\tilde{K}$ を K の代数閉包（のコード）という[11)]．任意の $b\in|\tilde{K}|$ に対し，ゼロでない K 上の多項式 $p(x)\in K[x]$ で，$h(p)(b)=0^{\tilde{K}}$ となるものが存在する．ここで，$p(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ に対し，$h(p)(x)=\sum_{i=0}^n h(a_i)x^i\in\tilde{K}[x]$ である．

有限次拡大やガロア理論などの基本的な事柄は RCA_0 で証明できる．

10) 定義 2.8 のような連続関数の定義は少し不自然に思われる方がいるかもしれないが，RCA_0 でできるだけ一般的に連続関数を定めるために現在の定義を採用している．ただし，これが最もふさわしい定義であるかどうかという問題は残っている [Friedman and Simpson 1999]．

11) 一般に RCA_0 では h の像 $h(K)$ の存在を示すことはできない．

この他にもたとえば，数理論理学の基本的な事柄についても RCA_0 で定めることができる．（可算）言語は関係記号，演算記号，定数記号の集合である．言語 L を一つ固定する．また，1 階述語論理の項，論理式を普通に定義できる．このとき，実際には，ゲーデル数によってコード化されているものを考えている[12)]．ゲーデル数は L をパラメータに使って原始再帰的に与えていると考えてよいので，項（のゲーデル数）全体の集合，論理式（のゲーデル数）全体の集合などの存在が RCA_0 で証明できる．第 I 部第 5 章で述べられているように，L の文の集合 T に対し，ある（適当なパラメータを使った）Σ^0_0 論理式 $\mathrm{Prov}_T(p,\varphi)$ で「p は φ の T における証明である」を表すことができる．「φ は T の定理である」を表す $\mathrm{Pr}_T(\varphi)$ は，Σ^0_1 である．$\mathrm{Pr}_T(\varphi)$ かつ $\mathrm{Pr}_T(\neg\varphi)$ となる L の文 φ が存在しないとき，T は無矛盾であるといい，T の定理がすべて T 自身に属するとき T は論理的帰結で閉じているという．また，任意の L の文 φ に対し，$\mathrm{Pr}_T(\varphi)$ か $\mathrm{Pr}_T(\neg\varphi)$ のいずれかが成り立つとき，T は完全であるという．

定義 2.11 RCA_0 でつぎが定義できる．$|M|$ を空でない $\mathbb{N}$ の部分集合とする．L_M を $|M|$ の要素に対応する定数記号を新しく加えて L を拡張した言語とする．また，$\mathrm{Term}_M, \mathrm{Snt}_M$ をそれぞれ，L_M の項全体の集合，文全体の集合とする．このとき，関数 $M : \mathrm{Term}_M \cup \mathrm{Snt}_M \to |M| \cup \{0,1\}$ は通常のタルスキの真理条件を満たすとき，可算 L 構造（のコード）という．たとえば，M はつぎの (1) から (6) などを満たす．

(1) $\forall t \in \mathrm{Term}_M(M(t) \in |M|)$.

(2) $\forall \sigma \in \mathrm{Snt}_M(M(\sigma) \in \{0,1\})$.

(3) 任意の $t_1, t'_1, \ldots, t_n, t'_n \in \mathrm{Term}_M$ に対し，

  (i) $M(t_1) = M(t'_1), \ldots, M(t_n) = M(t'_n)$ ならば，$M(R(t_1,\ldots,t_n)) = M(R(t'_1,\ldots,t'_n))$ および

  (ii) $M(f(t_1,\ldots,t_n)) = M(f(t'_1,\ldots,t'_n))$.

ただし，R, f はそれぞれ L の関係記号，関数記号とする．

(4) $M(\neg\sigma) = 1 - M(\sigma)$.

---

12) 以下では，項や論理式などとそれらのコード（ゲーデル数）は区別しない．

(5) $M(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = M(\sigma_1) \cdot M(\sigma_2)$.
(6) $M(\forall v \varphi(v)) = \prod_{a \in |M|} M(\varphi(a))$.

以上でみてきたように RCA_0 では多くの数学的概念を定めることができた．しかし，Z_2 では証明できるような古典的数学の多くの基本定理を示すことができない．それらの定理を示すには RCA_0 には含まれない Z_2 の公理が本質的に使われていることになる．しかも，そのような公理が何であるのか明確に知ることができる．それが次節で紹介する逆数学の結果である．

2.2　逆数学

第 II 部序にも述べたことだが，逆数学の目的は，「それを証明するのに必要な集合存在公理は何か」という観点から数学の定理を分類することである．具体的な結果を述べる前に，逆数学とは何かについて確認しておこう．

古典的数学の大部分は 2 階算術 Z_2 で展開できる．実際には Z_2 の部分体系である Π^1_1-CA_0，しいては ACA_0 でもその多くが展開できる．このとき，個々の具体的な数学の定理についてどの公理が本質的に必要であるのか問うのは自然であろう．このような問いかけに関する一連の研究のもと，1974 年のカナダのバンクーバーで開かれた国際数学者会議の講演 [Friedman 1974] においてフリードマンはつぎの主張をした．

原則 I　適切な公理から定理が証明できるならば，その公理はその定理から証明できる．

Z_2 で数学を展開するとき最も大きな役割を果たしているのは内包公理（定義 1.3(3)）である．この内包公理を制限することによって Z_2 のさまざまな部分体系が得られる．T をそのような部分体系とする．ただし，$\mathrm{RCA}_0 \subseteq \mathrm{T}$ とする．2.1 節で述べたように古典的数学の具体的な定理に現れる概念の多くは RCA_0 で定義できる．この意味で，古典的数学の定理の多くは RCA_0 で定まる．したがって，原則 I をもう少し正確に述べれば，つぎのようになる．

（RCA_0 で定まる）古典的数学の定理 τ に対して，多くの場合，適切な体系 T を選べば RCA_0 上で T と τ の同値性が証明できる．

つまり，多くの場合，公理から定理を導く数学の通常のパターンとは逆に，定理からそれを証明するのに用いた公理を導くことができるということである．これが「逆」数学という名前の所以であった．驚くべきことは，無数の数学の定理 τ を考えれば，S_τ として現れる体系は無数にあるように思われるが，S_τ として現れる体系は第 1 章で紹介した RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 の五つくらいしかないということである．すなわち，逆数学の原理とはつぎである．

多くの古典的数学の定理 τ に対して，τ は RCA_0 で証明できるか，もしくは，T を WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 のいずれかとすれば，RCA_0 上で T と τ の同値性が証明できる．

ここではまず，τ としてボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理「任意の有界実数列は収束する部分列をもつ」を例にとり，この原則を確かめてみよう．

2.1 節でみたように「実数列」などの概念は RCA_0 で定義できる．よってボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理の主張は RCA_0 で定まる．しかし，再帰理論の基本的事実から RCA_0 の ω モデル REC では成り立たない[13)]．よって，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理は RCA_0 で証明できない．

一方で，ACA_0 は PA を含み，ワイルの可述的数学 [Weyl 1960] の議論をある程度十分に展開しうる体系である．もちろん，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理のよく知られた証明を ACA_0 での証明に形式化することは容易にできる．

つぎのように逆数学の原理はボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理と ACA_0 にあてはまる．

定理 2.12　RCA_0 上でつぎの三つの同値性が示せる．

---

13)　任意の RE 集合は，定理 2.12 の証明と同じような議論で再帰的な有界単調増加実数列の収束点 c に対して，c で再帰的になる．

(1) ACA_0.
(2) ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理.
(3) 実数上の単調収束定理：有界単調実数列は収束する.

証明の前につぎの定理を示しておく．この定理は ACA_0 に対する逆数学において基本となる結果である.

定理 2.13 RCA_0 上でつぎの三つの同値性が示せる.

(1) Π^1_0 内包公理（定義 1.6(3)，ACA_0 とおきかえてよい）.
(2) Σ^0_1 内包公理：X を自由変数にもたない任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(n)$ に対し，$\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$.
(3) 任意の 1-1 関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の値域が存在する.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか．(2) と (3) の同値性は定理 1.20 より示せる．(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．そこで，任意の Σ^0_k 論理式に対する内包公理を $k \in \omega$ についての帰納法[14]で示す．$k = 0, 1$ のときは明らか．k で成り立つとき $k+1$ で成り立つことを示す.

$\varphi(n)$ を X を自由変数にもたない Σ^0_{k+1} 論理式とする．このとき，ある Σ^0_k 論理式 $\theta(m,n)$ で，$\varphi(n) \leftrightarrow \exists m \neg\theta(m,n)$ となる．帰納法の仮定から，$Y = \{(m,n) : \theta(m,n)\}$ が存在する．よって Σ^0_1 内包公理より，$X = \{n : \exists m \neg(m,n) \in Y\}$ も存在し，明らかに，$\forall n(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$ である. ■

定理 2.12 の証明 RCA_0 で考える．(1) $\Rightarrow$ (2) は先に述べた通りである．(2) $\Rightarrow$ (3) は自然な議論で成り立つ．残りは (3) $\Rightarrow$ (1) である．$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を単射とする．$c_k = \sum_{i \le k} 2^{-f(i)}$ とする．再帰的内包公理により $\langle c_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ は存在する．$\langle c_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ は有界単調増加有理数列である．(3) の仮定より $c = \lim_{k\to\infty} c_k$ が存在する．c と c_k との差を考えれば，任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$\exists m(f(m) = n) \leftrightarrow \forall k(\mid c_k - c \mid < 2^{-n} \to (\exists m \le n)(f(m) = n))$$

---

14) この「帰納法」はメタ理論における帰納法で，形式体系内の帰納法ではないことに注意する.

となることがわかる．右の論理式は Π^0_1 なので再帰的内包公理により，

$$\forall n(n \in X \leftrightarrow \exists m(f(m) = n))$$

となる集合 X，つまり f の値域が存在する．よって定理 2.13 より，ACA_0 が証明された． ■

この証明は主に再帰理論の基本的結果を元にしている．このように，逆数学は 20 世紀以後発展してきた数理論理学の成果を利用して，形式体系において数学がどのように形式化されるのかという，数学の基礎付けに関する問題意識に結び付く問題に現代的な立場から明確な答えを与えようとする試みであるともいえる．

以下では，体系の弱いものから順に RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0 と，それぞれの逆数学の結果をまとめて紹介する．

RCA_0 は基本体系である．よって，RCA_0 で証明できる定理は逆数学研究ではそれ以上調べようがない．RCA_0 で証明できる定理の具体例をあげる．

定理 2.14 つぎの定理はすべて RCA_0 で証明可能である[15]．

(1) 中間値の定理．

(2) 完備可分距離空間におけるウリゾンの補題．

(3) 完備可分距離空間におけるティーツの拡張定理．

(4) 完備可分距離空間はパラコンパクトである．

(5) 完備可分距離空間におけるベールのカテゴリー定理．

(6) 可分バナッハ空間における一意有界性原理．

(7) 代数学の基本定理．

(8) 任意の可算体には代数閉包が存在する．

(9) 任意の可算順序体には実閉包が一意に存在する．

(10) 1 階述語論理の健全性定理．

RCA_0 は再帰的関数の理論と密接な関係があり，RCA_0 で証明できる事柄は総じて計算可能解析学 (computable analysis)[Aberth 1980] や再帰的数学

15) ティーツの拡張定理やベールの定理には RCA_0 では証明できない形もある [Giusto and Simpson 2000; Brown and Simpson 1993].

(recursive mathematics)[Ershov *et al.* 1998] の中の再帰的な存在に関する主張に対応することを述べるにとどめ，証明を省略する．

つぎに WKL_0 における逆数学的結果を述べよう．WKL_0 は五つの体系のうち 2 番目に弱い体系で，RCA_0 に弱ケーニヒの補題「無限 0-1 木は必ず（無限）道をもつ」を加えたものである（定義 1.23）．WKL_0 は ACA_0 よりもはるかに弱い体系であるにもかかわらず RCA_0 よりも非常にたくさんのことが証明できる．

ここではその代表例としてコンパクト距離空間上の連続関数の一様連続性と最大値の定理について述べる．

定義 2.15（コンパクト距離空間）　RCA_0 でつぎが定義できる．完備可分距離空間 $\hat{A}$ は，つぎの条件を満たす $\hat{A}$ の有限列の無限列 $\langle\langle x_{ij} : i \leq n_j\rangle : j \in \mathbb{N}\rangle$ をもつとき，コンパクト距離空間という．

$$\forall z \in \hat{A}\forall j \in \mathbb{N}\exists i \leq n_j(d(x_{ij}, z) < 2^{-j}).$$

つまり「全有界」な完備可分距離空間 $\hat{A}$ として「コンパクト」を定義する．よく知られているように，完備可分距離空間において全有界性とコンパクト性「任意の（可算）開被覆は有限開被覆をもつ」は同値である．しかし RCA_0 でこれを証明することはできない．以下のように，この事実と弱ケーニヒの補題は同値である[16)]．この反転した定義のせいで，定理 2.16(2) の主張は奇異に見えるだろうが了承されたい．

定理 2.16　RCA_0 上でつぎの二つは同値である．

(1) WKL_0.

(2) コンパクト距離空間 $\hat{A}$ の任意の可算開被覆は有限開被覆をもつ．

証明　まず (1) $\Rightarrow$ (2) を示す．WKL_0 で考える．$\hat{A} = [0, 1]$ の場合のみ示す．一般の場合も同様の方法で示せる[17)]．

16)　先にみたように，点列コンパクトでもあることを示すには ACA_0 が必要である．

17)　このとき，弱ケーニヒの補題をつぎのように拡張しておくと便利である．（有界ケーニヒの補題）「有限分岐の無限木 $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ と関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して $\forall \sigma \in T \forall n < \mathrm{lh}(\sigma)(\sigma(n) < f(n))$ が成り立つとき，T は道をもつ」．有界ケーニヒの補題と弱ケーニヒの補題の同値性は，有界ケーニヒの補題の条件を満たす木の 0-1 木への自然な変換により示される．

まず，各 $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ に，つぎのように定義される有理開区間 (a_σ, b_σ) を対応させる．

$$a_\sigma = \sum_{i<\mathrm{lh}(\sigma)} \sigma(i)/2^{i+1}, \quad b_\sigma = a_\sigma + (1/2^{\mathrm{lh}(\sigma)}).$$

このとき，$\sigma \subseteq \tau$ ならば，$(a_\tau, b_\tau) \subseteq (a_\sigma, b_\sigma)$ である．

$[0,1]$ の可算開被覆 U が与えられたとする．U は端点が有理数である開区間の可算列 $\langle (p_i, q_i) : i \in \mathbb{N} \rangle$ と考えても一般性を失わない．ここで $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ を以下のように定義する．

$$\sigma \in T \iff \neg \exists i \leq \mathrm{lh}(\sigma)(p_i < a_\sigma < b_\sigma < q_i).$$

T は木である．この T は道をもたないことを背理法で示そう．

T の道 f があるとする．区間縮小法により，$\sigma = f[\mathrm{lh}(\sigma)]$ となる任意の σ に対し $a_\sigma \leq x \leq b_\sigma$ となる実数 x がただ一つ存在する．開集合 U は $[0,1]$ を覆っているから，ある i が存在して，実数 x は開区間 (p_i, q_i) に含まれる．

よって，$\sigma = f[\mathrm{lh}(\sigma)]$ となる十分長い σ をとれば $p_i < a_\sigma \leq x \leq b_\sigma < q_i$ となるはずである．これは $\sigma \notin T$ を意味するので，矛盾である．

T が無限の道をもたないならば，弱ケーニヒの補題により，T は有限集合である．つまり，十分大きな n が存在して，T に属する列の長さはすべて n より短い．したがって，$\forall \sigma(\mathrm{lh}(\sigma) = n \to \exists i \leq n(p_i < a_\sigma < b_\sigma < q_i))$．よって，$\{\ (p_i, q_i) : i \leq n\}$ は $[0,1]$ の有限被覆になっている．

つぎに (2) ⇒ (1) を示す．ここではカントル空間 $2^{\mathbb{N}}$ の (2) による普通の意味のコンパクト性から弱ケーニヒの補題を導く[18)]．RCA_0 で考える．$\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ に対し，$2^{\mathbb{N}}$ の開集合 $\{x \in 2^{\mathbb{N}} : x[\mathrm{lh}(\sigma)] \neq \sigma\}$ を O_σ とする．

$T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ は道をもたない 0-1 木とする．開集合列 $\langle U_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を

$$U_n = \bigcap \{O_\sigma : \mathrm{lh}(\sigma) = n \wedge \sigma \in T\}$$

によって定める．T は木なので，任意の n について $U_n \subseteq U_{n+1}$ となる．また，T は道をもたないので $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ は $2^{\mathbb{N}}$ の開被覆である．(2) より，

18) $[0,1]$ での証明が，[Simpson 1998; 田中 1997] にある．

U は有限部分開被覆 $\langle U_n : n \le l \rangle$ をもつ．つまり $2^{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \le l} U_n = U_l$ となる．よって，

$$\emptyset = 2^{\mathbb{N}} - U_l = \bigcup \{2^{\mathbb{N}} - O_\sigma : \mathrm{lh}(\sigma) = l \land \sigma \in T\}.$$

O_σ のつくり方から，これは長さ l である $\sigma \in T$ が存在しないことを意味する．よって．T は有限である．以上より弱ケーニヒの補題が示せた． ■

WKL_0 はコンパクト距離空間上の連続関数のさまざまな性質を証明するのに十分な体系である．WKL_0 で多くのことが証明できる要因の一つは，一様連続性に対して，その連続度合を評価するつぎのような関数の存在が示せることにある．

補題 2.17 WKL_0 でつぎが成り立つ．$\hat{A}$ をコンパクト距離空間，$\hat{B}$ を完備可分距離空間とする．このとき，連続関数 $f : \hat{A} \to \hat{B}$ はつぎの性質をもつ関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ をもつ．

$$\forall n \forall x, y \in \hat{A}(d(x, y) < 2^{-h(n)} \to d(f(x), f(y)) < 2^{-n}).$$

とくに，f は一様連続である．

証明 WKL_0 で考える．連続関数 f のコードを Φ_f とし，$\hat{A}$ の開被覆の列 $\langle U_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を，$U_n = \langle B(a_{n_i}, r_{n_i}) : i \in \mathbb{N} \rangle$ で，かつ

$$\exists i((a, r) = (a_{n_i}, r_{n_i})) \iff \exists b, s((a, 2r, b, s) \in \Phi_f \land s < 2^{-n-1})$$

となるように定める．定理 2.16 の証明の一般化により，$\hat{A}$ の有限開被覆の列 $\langle U'_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が存在する．ただし，U'_n は U_n の部分被覆である．

ここで，U'_n に属する開球の中で半径が最小のものを r_n とすると，任意の $d(x, y) < r_n$ となる実数 $x, y \in \hat{A}$ について $d(f(x), f(y)) < 2^{-n}$ となる．よって $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を，$h(n) =$「$2^{-j} < r_n$ となる最小の j」で定めれば，これが求める関数となる． ■

これにより最大値原理「コンパクト距離空間上の実数値連続関数は最大値をもつ」が WKL_0 で証明できる．

定理 2.18　つぎはどれも RCA_0 上で同値になる．

(1) WKL_0.

(2) コンパクト距離空間 $\hat{A}$ 上の連続関数 $f : \hat{A} \to \hat{B}$ は一様連続である．

(3) コンパクト距離空間上の実数値連続関数 $f : \hat{A} \to \mathbb{R}$ は最大値をもつ．

(4) コンパクト距離空間上の実数値一様連続関数は最大値をもつ．

証明　(1) ⇒ (2) は補題 2.17 による．(3) ⇒ (4) は明らか．まず，(1) ⇒ (3) を示す．WKL_0 で考える．$\langle U'_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を補題 2.17 の証明で与えられるような $\hat{A}$ の有限開被覆の列とする．このとき $\alpha_n = \max\{f(a) : B(a,r) \in U'_n\}$ で $\langle \alpha_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ を定めると，U'_n のつくり方から，$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ となる実数 α が存在し，これが f の上限であることは容易にわかる．

最後に $f(x) = \alpha$ となる $x \in \hat{A}$ が存在することを示す．今，存在しないと仮定する．すると $\forall x \in \hat{A}(f(x) < \alpha)$ である．このとき，$V = \langle B(a_n, r_n) : n \in \mathbb{N}\rangle$ を

$$\exists n((a,r) = (a_n, r_n)) \iff \exists b, s((a,r,b,s) \in \Phi_f \wedge b + s < \alpha)$$

となるように定めると，V は $\hat{A}$ の開被覆となる．定理 2.16 により，これは有限被覆 $\langle B(a_n, r_n) : n \leq l\rangle$ をもつ．$\beta = \max\{f(a_n) + s_n : n \leq l\}$ とおく．ここで s_n は，$\exists b \in B((a_n, r_n, b, s_n) \in \Phi_f \wedge b + s_n < \alpha)$ となるようにとる．このとき $\beta < \alpha$ となるが，これは明らかに α が f の上限であることに反する．よって，(1) ⇒ (3) が示せた．あとは (1) を否定して，(2), (4) のそれぞれの反例をつくればよい．[0,1] 上の連続関数で反例をあげよう．RCA_0 で考える．

$\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ に対して

$$a_\sigma = \sum_{i<\mathrm{lh}(\sigma)} 2\sigma(i)/3^{i+1}, \quad b_\sigma = a_\sigma + (1/3^{\mathrm{lh}(\sigma)})$$

とする[19)]．

19)　カントル空間 $2^{\mathbb{N}}$ は 3 進集合 $\left\{\sum_{i=0}^{\infty} 2f(i)/3^{i+1},\ f \in 2^{\mathbb{N}}\right\}$ として $[0,1]$ に埋め込まれていると考えて，各 $\sigma \in 2^{\mathbb{N}}$ に対し，$\forall f \in 2^{\mathbb{N}}\big(f(\mathrm{lh}(\sigma)) = \sigma \iff \sum_{i=0}^{\infty} 2f(i)/3^{i+1} \in [a_\sigma, b_\sigma]\big)$ となるように a_σ, b_σ を定めている．

(1) の否定を仮定する．すると，道をもたない無限 0-1 木 $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ が存在する．ここで，$T' \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ を

$$\sigma \in T' \leftrightarrow \sigma \notin T \land \forall \tau \subsetneq \sigma(\tau \in T)$$

で定める．T' は T に属さない極小の 0-1 有限列全体の集合を表す．

$A = \{a_\sigma : \sigma \in T'\} \cup \{b_\sigma : \sigma \in T'\}$ とおく．T' のどの二つの要素も $\subset$ 関係を満たさないので，各 $\sigma \in T'$ による閉区間 $[a_\sigma, b_\sigma]$ は互いに共通部分をもたない．T は道をもたないので，このような各 $\sigma \in T'$ に対し，A の中において，a_σ には直前の b_τ，b_σ には直後の $a_{\tau'}$ がある．また $0, 1 \in A$ もわかる．このように A に属す点によって $[0, 1]$ を分割できる．

(2) の反例はこうである．f を各 $[a_\sigma, b_\sigma]$ $(\sigma \in T')$ 上では値 $\mathrm{lh}(\sigma)$ をとり，残りの区間は両端を直線で結んだ [0,1] 上の折れ線関数とする．f は明らかに連続である．T は道をもたない無限木なので，T' は無限集合である．したがって f は有界でない．すなわち，一様連続でもない．

(4) の反例はこうである．g は各 $[a_\sigma, b_\sigma]$ $(\sigma \in T')$ 上では値 $1 - 3^{-\mathrm{lh}(\sigma)}$ をとり，残りの区間は両端を直線で結んだ [0,1] 上の折れ線関数とする．このとき g は一様連続である．しかし（1 を上限にもちさえするが）最大値をとらない．つまり $g(x) = 1$ となる $x \in [0, 1]$ はない． ■

さらに，数理論理学のもっとも基本的な定理の一つである完全性定理が WKL_0 と同値であることを述べよう．

定義 2.19 RCA_0 上でつぎの二つは同値になる．

(1) WKL_0.

(2) 1 階述語論理の完全性定理.

証明 まず，(1)⇒(2) を示す．可算言語 $\mathcal{L}$ を一つ固定する．X を $\mathcal{L}$ の文の無矛盾な集合とする．X の言語 $\mathcal{L}$ と共通部分をもたないような無限可算集合 C をとり，C の元をすべて数え上げたものを $\langle c_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ とおく．$\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$ とする．そして，x だけを変数にもつ $\mathcal{L}'$ の論理式をすべて数え上げたものを $\langle \varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\rangle$ とする．このとき，c_n は n 以下の任意の i について $\varphi_i(x)$ に現れないとしてよい．

$X' = X \cup \{\eta_n : n \in \mathbb{N}\}$ とする．ここで，η_n はヘンキン文 $\exists x\varphi_n(x) \to \varphi_n(c_n)$ のことである．普通の議論と同様にして，X' は無矛盾となる．

ここで，木 $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ をつぎで定義する．

$t \in T \iff$

$\forall\sigma < \mathrm{lh}(t)(t(\sigma) = 1 \to (\sigma$ は $\mathcal{L}'$ の文$))$, かつ $\forall\sigma < \mathrm{lh}(t)(\sigma \in X' \to t(\sigma) = 1)$, かつ,

$\forall p < \mathrm{lh}(t)$ p が X' の証明ならば，$\forall i < \mathrm{lh}(p)[(p(i)$ は $\mathcal{L}'$ の文$)\to t(p(i)) = 1]$ かつ,

$\forall\sigma < \mathrm{lh}(t)\forall\tau < \mathrm{lh}(t)[((\sigma$ は $\mathcal{L}'$ の文$)\wedge\tau = \neg\sigma) \to t(\sigma) = 1 - t(\tau)]$

X' は無矛盾なので，T は無限木である．弱ケーニヒの補題により，T の道 f が存在する．$X'' = \{\sigma : f(\sigma) = 1\}$ とする．T の定義から，明らかに X'' は X' を含み，無矛盾かつ完全かつ論理的帰結で閉じている．X'' から容易に X のモデル $\mathcal{M}$ を構成できる．実際，M と $\{c_n \in C : \neg\exists m(m < n\wedge(c_n = c_m \in X''))\}$ とし，任意の文 $\sigma \in \mathrm{Snt}_M$ について,

$$\mathcal{M}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \in X'' \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

と定めて，自然に $\mathcal{M}$ が与えられる．

つぎに，(2)⇒(1) を示す．RCA_0 で考える．述語論理の完全性定理から（可算無限個の命題変数をもつ）命題論理の完全性定理を導くことができる．命題論理におけるモデルは，各命題変数に 0 か 1 をわりふる関数として自然に定義される．ここでは 1 は真，0 は偽を表すものとする．さらに通常の議論から，命題論理のコンパクト性定理が導ける．われわれはここから弱ケーニヒの補題を導く．

可算無限個の命題変数 $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ をもつ古典命題論理を考える．T を 0-1 無限木とする．論理式 σ_n を

$$\bigvee\{\bigwedge\{a_i^{s(i)} : i < n\} : s \in T, \mathrm{lh}(s) = n\}$$

で定める．ただし a_i^1 は a_i，a_i^0 は $\neg a_i$ である．すると，任意の n について T の長さ n の元 τ から $\{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ のモデルが容易に得られる．よって，コンパクト性定理より $\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\}$ のモデル $\mathcal{M}$ が存在する．このとき，

$$f(n) = \begin{cases} 1 & (\mathcal{M}(a_n) = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおくと，f は T の道である． ■

WKL_0 で証明できる定理の数は，RCA_0 のそれより飛躍的に多くなる．WKL_0 との同値性が証明できる代表的な定理をあげてみるとつぎである．この他にも重要な定理の多くが WKL_0 と同値になる．

定理 2.20 つぎのどの定理も RCA_0 上で WKL_0 と同値になる．

(1) ハイネ・ボレルの被覆定理．
(2) コンパクト距離空間上の実数値連続関数は一様連続である．
(3) コンパクト距離空間上の実数値連続関数は最大値をもつ．
(4) ワイエルシュトラスの多項式近似定理：$\mathbb{R}$ の有界閉区間上の実数値連続関数は多項式近似列をもつ．
(5) $\mathbb{R}$ の有界閉区間上の実数値連続関数はリーマン積分可能である．
(6) 微分方程式についてのコーシー・ペアノの定理．
(7) ブラウワーの不動点定理．
(8) ジョルダンの閉曲線定理．
(9) 可分バナッハ空間におけるハーン・バナッハの定理．
(10) 任意の可分コンパクト群上にはハール測度が存在する．
(11) 可算可換環は素イデアルをもつ．
(12) 任意の可算順序体には代数閉包が一意に存在する．
(13) 1 階述語論理の完全性定理．

つぎに ACA_0 について述べよう．ACA_0 は算術的内包公理（Π^1_0 内包公理，定義 1.6, 1.7）で特徴付けられる体系である．ACA_0 は古典的数学を展開するにはある程度十分であり，多くの結果が比較的素直に展開できる．そうい

う意味では，自然に数学を展開するための最小の体系といえるかもしれない．

定理 2.12 ではボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理が ACA_0 と同値となることをみた．ここでは，代表的な例として「可算体上の可算ベクトル空間は基底をもつ」という事実も ACA_0 と同値となることをみてみよう．

定理 2.21 RCA_0 上でつぎの二つは同値である．

(1) ACA_0.

(2) 可算体上の可算ベクトル空間は基底をもつ．

証明 まず，(1) $\Rightarrow$ (2) を示す．ACA_0 で考える．V を可算体 K 上のベクトル空間とする．ここで，V の元の有限列 $\langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle$ で，v_n が $v_0, \ldots, v_{n-1}$ の 1 次結合で表せるものの全体の集合を W とする．つまり，

$$W = \{\langle v_0, v_1, \ldots, v_n \rangle : \exists k_1, \ldots, k_{n-1}(v_n = \sum_{i<n} k_i v_i)\}$$

とする．Π^1_0 内包公理からこのような W は存在する．原始再帰法により，

$$e_n = 「(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, v) \notin W \text{ となる最小の } v \in V」$$

で $\langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を定義する．明らかにこれは V の基底である．

つぎに，(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．RCA_0 で考える．$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を任意の 1-1 関数とする．定理 2.13 より，f の値域の存在をいえばよい．$X = \langle x_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上の可算ベクトル空間を V_0 とする．また，

$$x'_m = x_{2f(m)} + m \cdot x_{2f(m)+1}$$

とし，V_1 を $X' = \langle x'_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ で生成される V_0 の部分ベクトル空間とする[20]．X' は V_1 の基底である．(2) を仮定して，ここで，商空間 $V_2 = V_0/V_1$ をとる．V_2 の基底 $X'' = \langle x''_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ をとる[21]．$X' \bigcup X''$ は V_0 の基底と

20) x'_m のつくり方から V_0 の元 $q_0 x_0 + \cdots + q_l x_l$ $(q_i \in \mathbb{Q})$ が V_1 の元であるかどうかは，$\forall n(q_{2n} = 0 \to q_{2n+1} = 0)$ かつ $\forall n(q_{2n} \neq 0 \to f(q_{2n+1}/q_{2n}) = n)$ かどうかを確かめることで判定できる．よって RCA_0 でこのような V_1 が存在することが示せる．

21) ここでは，$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$ の定義と同じく，V_1 による同値類の最小元を集めることで V_2 を定める．すなわち，$v \in V_2 \iff v \in V_0 \land \forall w((w < v \land w \in V_0) \to v - w \notin V_1)$ で V_2 を与える．

考えてよい．このとき，n が f の値域に属することと，(*)「x_{2n} もしくは x_{2n+1} は，それを基底 $X' \bigcup X''$ を使って 1 次結合で表したとき，$f(m) = n$ となる x'_m を項にもつ」こととは同値である．基底を用いた 1 次結合の表記は一意的であることに注意すれば，主張 (*) は Π^0_1 で書ける．よって再帰的内包公理より f の値域は存在する． ■

ACA_0 との同値性が証明できる代表的な定理をあげてみるとつぎのようになる．これをみても多岐にわたる分野で ACA_0 と同値になる主張があることがわかる．

定理 2.22 つぎのどの定理も RCA_0 上で ACA_0 と同値になる．

(1) ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理．
(2) アスコリの補題．
(3) 可算体上の可算ベクトル空間は基底をもつ．
(4) 可算体 K とその可算拡大体 L について，L は K 上の超越基底をもつ．
(5) 可算（可換）環は極大イデアルをもつ．
(6) 可算アーベル群は可除閉包を一意的にもつ．
(7) ケーニヒの補題．
(8) 数的関数列に関するラドーの選択補題．
(9) コンパクト距離空間上のボレル測度のラドン・ニコディムの定理．
(10) コンパクト距離空間上のボレル測度のリースの拡張定理．

ATR_0 は ACA_0 に算術的超限再帰公理を加えた体系である．算術的超限再帰公理は可算整列順序に沿ってテューリング・ジャンプを超限回くり返すことを許す主張で，それはまた，開集合からはじめて順にボレル集合を構成していく手続きに対応している．このように ATR_0 では ACA_0 をさらに超えて，無限組み合わせ論や古典的記述集合論の基本的な結果を展開することができる．本書の内容を超えるため，ACA_0 以上の体系 ATR_0 と Π^1_1-CA_0 の逆数学の具体例は定理 2.23 にとどめる．ただし，実際には，普通の数学の定理から ATR_0 を導くときに直接算術的超限再帰を導くのではなく，定理 2.23(1) の整列順序の比較可能性，または Σ^1_1 分離原理（定理 1.30 参照）を導くことが多いことを述べておく．ATR_0 と同値になる代表的な主張をつぎにあげる．

定理 2.23　つぎのどの定理も RCA_0 上で ATR_0 と同値になる.

(1) 二つの可算整列順序は比較可能である.

(2) ルージンの分離定理.

(3) ベール空間における非可算な閉集合は完全集合を含む.

(4) 任意の可算被約アーベル p 群にはウルム因子列が存在する.

(5) ベール空間における非可算な閉集合は完全集合を含む.

(6) ゲイル・スチュワートの定理：Σ^0_1 ゲームの決定性.

(7) Σ^0_1 分割のラムジー性.

(8) 任意の可算二部グラフはケーニヒ被覆をもつ.

Π^1_1-CA_0 は逆数学においては最も強い体系と考えられる. これまでの例からわかるように, Z_2 で展開できる数学の多くは, Π^1_1-CA_0 まで必要としない. しかし, 代数や組み合わせ論, 記述集合論などの分野でいくつかの例外がある. ここでは, その一例として「可算アーベル群は可除群と被約群の直和になる」という事実が, Π^1_1-CA_0 と同値となることをみる.

定理 2.24　RCA_0 でつぎの二つは同値である.

(1) Π^1_1-CA_0.

(2) 可算アーベル群は可除群と被約群の直和になる.

証明の前につぎの定理を述べておく. ACA_0 と定理 2.14 との関係と同様, この定理は Π^1_1-CA_0 での逆数学において基本となる結果である.

定理 2.25　RCA_0 上でつぎの同値性が示せる.

(1) Π^1_1 内包公理.

(2) 任意の木の無限列 $\langle T_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ に対してつぎが成り立つ.

$$\exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow T_n \text{は道をもつ}).$$

定理 2.24 の証明　(1) $\Rightarrow$ (2) の証明はこうである. Π^1_1-CA_0 で考える. G を可算アーベル群とする. $g \in G$ は, 任意の素数 p に対して何回でも p で割れるとき, つまり $g = f(0)$, $\forall n(pf(n+1) = f(n))$ となる関数 $f : \mathbb{N} \to G$ が存在するとき, 可除的という. これは Σ^1_1 の主張であるから, Π^1_1 内包公理よ

り，G の可除的な要素全体のなす集合 D が存在する．いま $G = D \oplus R$ となる G の部分群を R とする[22)]．明らかに R は被約である．

つぎに (2) $\Rightarrow$ (1) を示す．定理 2.25 より，任意の木の無限列 $\langle T_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ に対し，$\forall n(n \in X \leftrightarrow T_n$は道をもつ$)$ となる集合 X の存在を示せばよい．ここでは簡単のために ACA_0 で考える[23)]．

$\langle T_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ を木の無限列とする．$T = \{\langle n \rangle ^\frown \sigma : \sigma \in T_n\}$ とすると，T も木である．

G を $\langle x_\sigma : \sigma \in T \rangle$ で生成されるアーベル群とする．ただし $\langle x_\sigma : \sigma \in T \rangle$ は，任意の $\sigma, \sigma ^\frown \langle n \rangle \in T$ に対し，$x_{\langle\rangle} = 0, \quad px_{\sigma ^\frown \langle n \rangle} = x_\sigma$ という関係をもつものとする[24)]．(2) の仮定より，G は可除群 D と被約群 R の直和 $G = D \oplus R$ となる．

このとき，(*)「σ からのびる T の道があることと，$x_\sigma \in D$ であることは同値」である．この (*) を示そう．σ からのびる T の道 f があるとする．$\forall n(px_{f[n+1]} = x_{f[n]})$ なので，$\langle x_{f[n]} : n \in \mathbb{N} \rangle$ で生成される G の部分群 A は可約である．よって $A \subseteq D$ となる[25)]．したがって，$x_\sigma \in D$ である．逆に，$x_\sigma \in D$ とする．原始再帰法により，$d_0 = x_\sigma, pd_{n+1} = d_n$ となる D の無限列 $\langle d_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が存在する．d_n のつくり方から，d_n を $\sum k_\tau x_\tau$ $(0 \leq k_\tau < p)$ の形の有限和で表したとき，$k_\tau \neq 0$ となる x_τ に対し，d_{n+1} は同じような有限和で表したとき，やはり $\tau \subsetneq \tau'$ となる項 $x_{\tau'}$ を零でない係数でもつ．再び原始再帰法により，

$$\sigma_0 = \sigma \wedge \forall n((x_{\sigma_n}\text{は } d_n \text{に（上の意味で）現れる}) \wedge \sigma_n \subsetneq \sigma_{n+1})$$

となる無限列 $\langle \sigma_n \in T : n \in \mathbb{N} \rangle$ が存在する．$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = \sigma_n(n)$ で定めれば，f は T の道である．以上より (*) が示せた．

よって，任意の $n \in \mathbb{N}$ について，

22) 可除群の入射は ACA_0 で示せる [Friedman *et al.* 1983].
23) RCA_0 上の証明に直すには若干の工夫がいるが，証明の本質はここで述べられている．
24) G は各要素 g が $g = \sum k_\sigma x_\sigma$ $(0 \leq k_\sigma < p)$ の形の有限和で一意的に表せるものである．
25) ここに ACA_0 を使う．

$$(T_n\text{は道をもつ}) \leftrightarrow (\langle n\rangle \text{からのびる } T \text{ の道がある}) \leftrightarrow x_{\langle n\rangle} \in D$$

が成り立つ．したがって，再帰的内包公理より $\exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow T_n$は道をもつ) が示せた． ■

最後に Π^1_1-CA_0 と同値になる代表的な主張をあげよう．

定理 2.26 つぎのどの定理も RCA_0 上で Π^1_1-CA_0 と同値になる．

(1) カントル・ベンディクソンの定理：閉集合は完全集合と可算集合の和で表せる．

(2) 補解析同値関係についてのシルバーの定理．

(3) 可算アーベル群は可除群と被約群の直積になる．

(4) 任意の可算アーベル p 群にはウルム因子列が存在する．

(5) $\Sigma^0_{1\rho}$ ゲームの決定性．

(6) Σ^0_2 分割のラムジー性．

第 2 章では逆数学について概観した．この章を通して，われわれのよく見知った数学の定理を 2 階算術の言語にあわせてどのように書き表し，その逆数学的結果をどのように導くのかをおおよそではあるがわかっていただけたと思う．

最後に，本章を締めくくるにあたり，逆数学の原理にあてはまらない定理もあることを注意しておく．ACA_0 と RCA_0 の間にあるものとしてつぎの二つの主張がある．

定義 2.27 つぎは RCA_0 で定義できる．

(1) つぎの主張を BCT という．X を自由変数としてもたない任意の算術的論理式 $\varphi(x, y)$ に対して，

$$\forall n \forall \sigma \in 2^{<\mathbb{N}} \exists \tau \in 2^{<\mathbb{N}} \big(\sigma \subseteq \tau \wedge \varphi(n, \tau)\big) \to \exists X \forall n \exists k \varphi(n, X[k]).$$

(2) つぎの主張を弱弱ケーニヒの補題 (WWKL) という．任意の道をもたない 0-1 木 T に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{\sigma \in T : \mathrm{lh}(\sigma) = n\}|}{2^n} = 0.$$

上の二つの主張はどれも ACA_0 で証明できる．BCT はおおまかにいって，カントル空間の算術的論理式で一様に定義できる稠密な開集合は共通の元をもつことを主張したものである．ベールのカテゴリー定理などで，WKL_0 で証明できない形のものがこれで証明できる [Brown and Simpson 1993]．BCT は WKL と RCA_0 において互いに独立である．すなわち，一方から他方を導くことが RCA_0 においてはできない．WWKL_0 は，WKL_0 より真に弱い部分体系である[26)]．コンパクト距離空間 $\hat{A}$ 上の実数値連続関数全体のなす可分バナッハ空間 $C(\hat{A})$ もまた，完備可分距離空間として RCA_0 で定めることができる．このとき，値が恒等的に 1 である定数関数 $1_{\hat{A}}$ に対し，$\mu(1_{\hat{A}}) = 1$ である非負の連続線形汎関数 $\mu : C(\hat{A}) \to \mathbb{R}$ として，$\hat{A}$ 上の測度を定めることができる．WWKL は，このようにして定まる測度の可算加法性を表している．よって，測度に関する定理には RCA_0 上で WWKL と同値になるものがある．たとえば，$[0,1]$ 上のルベーグ測度の単調収束定理 [Yu 1994] やヴィタリの被覆定理 [Brown *et al.* 2002] などがそうである．

26) 最近では，再帰理論との関わりから，WWKL よりさらに弱いつぎの DNR という主張も注目されている．

$$\forall X \exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \forall e (\{e\}^X(e) \neq f(e)).$$

RCA_0 で $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^2_2$ から DNR が導ける [Hirschfeldt *et al.* 2005]．3.1 節参照．

第3章
逆数学周辺

第 3 章では逆数学の周辺にある話題を四つ紹介することにしたい．まず，3.1 節で組み合わせ論の代表的な定理であるラムジーの定理に焦点をしぼり，無限ラムジーの定理に関連する話題を述べる．ここでは，PA の独立命題についても簡単に触れる．つぎに 3.2 節ではフリードマンの定理を紹介する．この定理から WKL_0 によりヒルベルトのプログラムの部分的実現が果たされるとみなせる．

フリードマンの講演 [Friedman 1974] では，逆数学に直接関わる原則の他に，もう一つ原則をあげている．3.3 節では，この原則に関わる結果を紹介しよう．

逆数学のこれまでの枠を離れた研究もなされている．3.4 節では，その代表的なものをいくつか解説する．もう少し広い意味での逆数学の現状をみてほしい．

3.1　ラムジーの定理と PA の独立命題

ラムジー理論[1]は，数論・幾何・トポロジー・数理論理学といった数学の分野ばかりでなく情報理論や計算機科学といった多くの分野に応用されている．逆数学においても多くの話題を提供してくれている．3.1 節ではラムジー理

1)　ラムジー型の組み合わせ論的定理は [Graham *et al.* 1990] にまとめて書かれているので参考にしてほしい．

論の最も基本となる無限ラムジーの定理に関して逆数学に関わる結果をいくつか紹介する．それに関連して PA の独立命題についても触れることにする．

k を自然数，X を自然数を要素にもつ集合とする．

$[X]^k$ をちょうど k 個の要素をもつ X の有限部分集合全体のなす集合とする[2)]．さらに自然数 l に対し，関数 $f:[X]^k \to \{0,1,\ldots,l-1\}$ を $[X]^k$ の l 着色という．$H \subseteq X$ は，f の定義域を $[H]^k$ に制限した関数 $f\lceil_{[H]^k}$ が定数関数になるとき，f の等質 (homogeneous) 集合という．このとき任意の自然数 k, l, m と有限集合 X について，つぎの主張を $X \to (m)^k_l$ と書く．

> $[X]^k$ の l 着色にはつねに，m 個以上の要素をもつ等質集合がある．

有限ラムジーの定理とはつぎの主張である．

定理 3.1（有限ラムジーの定理）　任意の自然数 k, l, m について，ある自然数 $n \geq k$ で，「n 個以上の要素をもつ任意の有限集合 X に対し $X \to (m)^k_l$」を満たすものが存在する．

自然数を要素にもつ有限集合 X は $\min X$ 以上の要素をもつとき相対的に大きいという．$X \to (m)^k_l$ を少し変形したつぎの主張を考えよう．つぎの主張を $X \to_* (m)^k_l$ と書く．

> $[X]^k$ の l 着色にはつねに，m 個以上の要素をもつ相対的に大きい等質集合がある．

つぎの定理をパリス・ハーリントンの定理（以下 PH と略す）という [Paris and Harrington 1997].

定理 3.2（PH）　任意の自然数 k, l, m について，ある自然数 $n \geq k$ が存在し，$n \to_* (m)^k_l$ が成り立つ．ただし，n は集合 $\{0,1,\ldots,n-1\}$ と同一視する．

有限ラムジーの定理や PH は PA で定義できる主張である．しかも，有限ラムジーの定理と PH はともにケーニヒの補題とつぎの無限ラムジーの定理による簡単な帰結である．

2)　X は要素を大きさの順にならべた長さ k の有限列全体の集合とみなしてもよい．

定理 3.3（無限ラムジーの定理） 任意の自然数 k, l と無限集合 X について，$[X]^k$ の l 着色は必ず無限等質集合をもつ．

もう一つ有限ラムジーの定理の変形を考える．着色関数 $f : [X]^k \to \omega$ は，任意の $A \in [X]^k$ に対して，$f(A) < \min(A)$ となるとき退化 (regressive) であるという．つぎの主張を $X \to (m)^k_{\text{reg}}$ と書く．

> $[X]^k$ の退化 l 着色 f はつねに，m 個以上の要素をもつ集合 $H \subseteq X$ で，$A \in [H]^k$ において $f(A)$ の値が $\min A$ によってのみ決まるものをもつ（この H は f の最小等質集合 (min-homogeneous) という）．

つぎの定理を金森･マカルーンの定理（以下 KM と略す）という [Kanamori and McAloon 1987].

定理 3.4（KM） 任意の自然数 k, l, m について，ある自然数 $n \geq k$ が存在して，$n \to (m)^k_{\text{reg}}$ が成り立つ．ただし，慣用により n と集合 $\{i \in \omega : i < n\}$ は同一視している．

KM もまた PA で定義できる主張であり，PH $\to$ KM が PA で証明できる．有限ラムジーの定理と PH，KM は非常によく似た主張だが，PA における証明可能性という観点からはまったく異なる．つぎに PA の独立命題を求め，より一般的な方法により PH や KM が PA の独立命題となることを述べる．

$\mathcal{M}$ を PA のモデルとする．$\mathcal{M}$ の領域 M の空でない部分集合 I は，$\forall b \in I \forall a \in M(\mathcal{M} \models a < b \Rightarrow a \in I)$ かつ $\forall a \in I(a+1 \in I)$ を満たすとき，$\mathcal{M}$ の切断 (cut) といい，$I \subseteq_e \mathcal{M}$ と書く．M の真部分集合となる切断を真の切断という．また切断 I が $\mathcal{M}$ の $\mathcal{L}_1$ 部分構造の領域となるとき，その $\mathcal{L}_1$ 構造も再び I と書くことにする．$\mathcal{M}$ が PA のモデルならば，自然な対応により $\mathcal{M}$ は標準モデル ω を部分構造としてもつとみなせる [Kaye 1991]．このとき，ω は $\mathcal{M}$ の切断となる．ω に属さない $\mathcal{M}$ の元を超準元 (non-standard element) という．

定義 3.5 PA において Σ_1 論理式で定義できるつぎの三つの性質を満たす 2

変数関数 $Y(x,y)$[3] を PA の指標という．

(1) $\mathrm{PA} \vdash \forall x, y(Y(x,y) \leq y)$.

(2) $\mathrm{PA} \vdash \forall x, y, x', y'((x' \leq x \wedge y \leq y') \to Y(x,y) \leq Y(x',y'))$.

(3) 任意の PA の超準モデル $\mathcal{M}$ に対し，$Y^{\mathcal{M}}(a,b)$ が超準元であることと，$a \in I$ かつ $b \notin I$ となる PA のモデルとなる切断 I があることは同値である．

定理 3.6 PA の指標 $Y(x,y)$ に対して，$\forall x, z \exists y Y(x,y) \geq z$ は PA で証明できない．

証明 $\mathcal{M}$ を PA の超準モデルとし，a, c を超準元 $c < a$ となるようにとる．今，$\mathcal{M} \models \exists y Y(a,y) \geq c$ としてよい．$\exists y Y(a,y) \geq c$ は Σ_1 であるから，$\mathcal{M} \models Y(a,b) \geq c$ となる最小の b をとる．Y は PA の指標だから，$I \models \mathrm{PA}$ となる $\mathcal{M}$ の切断 I がある．このとき，$c, a \in I$, $b \notin I$ である．b のとり方から明らかに，$I \not\models \exists y Y(a,y) \geq c$ である． ■

$\mathcal{L}_1$ の論理式を Σ_0 論理式という．量化記号が有界量化記号としてしか現れない．

定義 3.7 $\mathcal{M}$ を PA のモデルとする．$c \in M$ に対し，単調増加列 $\langle c_i : i \in \omega \rangle$ を考える[4]．任意の番号 $n_1 < \cdots < n_k$, $m_1 < \cdots < m_k$ と任意の Σ_0 論理式 $\theta(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_k)$ に対し，

$$\mathcal{M} \models \theta(a_1, \ldots, a_l, c_{n_1}, \ldots, c_{n_k})$$

と

$$\mathcal{M} \models \theta(a_1, \ldots, a_l, c_{m_1}, \ldots, c_{m_k})$$

の同値性が任意の $a_1, \ldots, a_l < c_{\min\{n_1, m_1\}}$ について成り立つとき，単調増加列 $\langle c_i : i \in \omega \rangle$ は（Σ_0 に関して）対角一様列 (sequence of diagonal indiscernibles) であるという．

3) Y が Σ_1 論理式で定義できる関数であるとは，$Y(x,y) = Z$ が Σ_1 論理式で $\mathrm{PA} \vdash \forall x, y \exists Z(Y(x,y) = Z)$ を満たすということである．以下では，PA の任意のモデル $\mathcal{M}$ に対し，$\mathcal{M}$ における Y の解釈もまた Y と表す．

4) すなわち $c \in M$ を $\mathcal{M}$ における有限列のコードとしてとり，その超準元番目の値のところだけ考える．ω は $\mathcal{M}$ の切断であることに注意する．

$\mathcal{M}$ を PA のモデルとし，$\langle c_i : i \in \omega \rangle$ を対角一様列とする．$\mathcal{M}$ の切断 I を $I = \{a \in M : \exists i \in \omega(\mathcal{M} \models a \leq c_i)\}$ で定める．この I が $\mathcal{L}_1$ 構造ならば，k に関する帰納法から，任意の番号 $n_1 < \cdots < n_k$ と任意の Σ_0 論理式 $\theta(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_k)$ に対し，$M \models \exists y_1 < c_{n_1} \ldots Q y_k < c_{n_k} \theta(a_1, \ldots, a_l, y_1, \ldots, y_k)$ と $I \models \exists y_1 \ldots Q y_k \theta(a_1, \ldots, a_l, y_1, \ldots, y_k)$ の同値性が任意の $a_1, \ldots, a_l < c_{\min\{n_1, m_1\}}$ について成り立つ．ここで，$\exists y_1 < z_1 \ldots Q y_k < z_k$ の形の表記は，有界量化記号 $\exists y_i < z_i, \forall y_i < z_i$ が交互に k 回現れたものである．したがって，$\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ から $I \models \mathrm{PA}$ である．

対角一様列の存在はラムジーの定理によって導くことができる．実際，つぎの補題が成り立つ．

$\mathcal{M}$ を PA のモデルとする．このとき，$a, b \in M$ に対し，M の部分集合 $[a, b]$ を $[a, b] = \{n \in M : \mathcal{M} \models a \leq n \leq b\}$ で定める．

補題 3.8 $\mathcal{M}$ を PA のモデルとする．超準元 $a, b, c, d \in M$ に対し，$\mathcal{M} \models 2c + 1 < a < b$ かつ，$\mathcal{M} \models [a, b] \to (d)^{2c+1}_{\mathrm{reg}} \wedge d \to (3c+1)^{2c+1}_{c+2}$ が成り立つならば，$\mathcal{M}$ における長さ $c + 1$ 以上の単調増加有限列（のコード）$e \in M$ で，つぎの 3 条件を満たすものが存在する[5)]．

(1) $\mathcal{M} \models a \leq e_0 < e_c \leq b$. (2) $\mathcal{M} \models (e_i)^2 < e_{i+1}$ $(i \in c/2)$.

(3) $\langle e_i : i \in \omega \rangle$ は対角一様.

証明 [Kaye 1991, Lemma 14.12] をみよ． ■

PA の超準モデル $\mathcal{M}$ においては，以下の性質をよく使う．

補題 3.9（過剰原理 (overspill principle)） $\mathcal{M}$ を PA の超準モデルとし，I を $\mathcal{M}$ の真の切断とする．このとき，$\mathcal{M}$ のパラメータ付き $\mathcal{L}_1$ 論理式 $\varphi(x)$ に対して，すべての $a \in I$ で $\mathcal{M} \models \varphi(a)$ ならば，$\mathcal{M} \models \forall x \leq b \varphi(x)$ となる $b \notin I$ が存在する．

定理 3.10 関数 $Y_{\mathrm{PH}}(x, y)$ を「$[x, y] \to_* (2k)^k_3$ となる最小の k」，関数 $Y_{\mathrm{KM}}(x, y)$ を「$[x, y] \to (2k)^k_{\mathrm{reg}}$ となる最小の k」で定めるものとすると，

---

5) 条件 (1), (2) より，$\mathcal{M}$ の切断 $I = \{a \in M : \exists i \in \omega(\mathcal{M} \models a \leq c_i)\}$ は $\mathcal{L}_1$ 構造となる．

これらは PA の指標である[6]．したがって，定理 3.6 より，PH と KM はともに PA で証明できない．

証明　Y_{PH} や Y_{KM} が PA で Σ_1 論理式で表せるものであり，指標の定義 3.5 の条件 (1), (2) を満たすのは明らかである．そこで，条件 (3) を満たすことをみる．ここでは，Y_{KM} についてのみ示す．Y_{PH} についても同様に示せる．

$\mathcal{M}$ を PA の超準モデルとする．$a \in I$ かつ $b \notin I$ となる PA のモデルとなる切断 $I \subseteq_e \mathcal{M}$ があるとする．任意の $n \in \omega$ について $\mathrm{PA} \vdash \forall x, z \exists y([x, y] \to (z)^n_{\mathrm{reg}})$ なので，$I \models \exists y(Y_{\mathrm{KM}}(a, y) = n)$ である[7]．$\exists y(Y_{\mathrm{KM}}(a, y) = n)$ は Σ_1 だから，$b \notin I$ より，$\mathcal{M} \models \exists y < b(Y_{\mathrm{KM}}(a, y) = n)$．よって過剰原理より，$\mathcal{M} \models \exists y < b(Y_{\mathrm{KM}}(a, y) = c)$．となる超準元 $c \in \mathcal{M}$ がある．したがって，$Y(a, b)$ は超準元である．

つぎに，$Y^{\mathcal{M}}_{\mathrm{KM}}(a, b)$ が超準元であるとする．このとき，$\mathcal{M} \models ([a, b] \to (2d)^d_{\mathrm{reg}})$ かつ d は超準元である．また $\mathcal{M} \models d < a$ と考えて一般性を失わない．有限ラムジーの定理より，任意の $n \in \omega$ について，d が超準元なので $\mathcal{M} \models (d \to (3n+1)^{2n+1}_{n+2})$ である[8]．過剰原理より，$\mathcal{M} \models 2c+1 \leq d \wedge (d \to (3c+1)^{2c+1}_{c+2})$ となる超準元 c がとれる．よって，補題 3.8 より，$a \in I \models \mathrm{PA}$ かつ $b \notin I$ となる $\mathcal{M}$ の切断 I がある．■

不完全性定理は PA では証明できない真なる主張の存在をいうものである．PH はそのような数学的に自然な主張で最初に発見されたものである．有限ラムジーの定理と PH の違いは，それによって特徴付けられる関数の増加率によってもわかる．各 k, l, m に対して $[0, n] \to (m)^k_l$ を満たす最小の n をわりふる関数 $R(k, l, m)$ をラムジー関数という．たとえば，$R(2, 2, 3) = 6$ である．ラムジー関数と同様に，各 k, l, m に対して $[0, n] \to_* (m)^k_l$ を満たす最小の n をわりふる関数を $PH(k, l, m)$ とする．$PH(k, l, m)$ の値は $R(k, l, m)$

---

6)　PA の指標は他にも，$Y(x, y) =$「$[x, y]$ が ω_z 大になる最大の z」などがある．

7)　$n \in \omega$ を固定したとき，このように着色の領域の指数を m に制限された PH や KM は，有限ラムジーの定理の普通の議論を用いて，PA で証明することができる．定理 3.10 を参照.

8)　有限ラムジーの定理は（ω で）真な命題である．また，（ω で）真な Σ_1 文は PA の任意のモデルで真である．

に比べて急速に増加する．実際に，f_α を急増加関数としたとき，任意の順序数 $\alpha < \epsilon_0$ に対して，$PH(k,l,m)$ は f_α を支配する[9]．一方 $R(k,l,m)$ は f_4 で支配される．

話を無限ラムジーの定理に戻そう．RCA_0 でつぎが定義できる．任意の $k,l \in \mathbb{N}$ について，$[\mathbb{N}]^k$ の l 着色は必ず無限等質集合をもつことを，$\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^k_l$ と書く．ケーニヒの補題を用いるよく知られた証明を ACA_0 に適用することでつぎの結果を得る．

定理 3.11 ACA_0 でつぎが証明できる．任意の $k \in \mathbb{N}$ について，$\forall l(\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^k_l)$ ならば $\forall l(\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^{k+1}_l)$ である．

$\forall l(\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^k_l)$ は算術的論理式ではないから，上の定理から無限ラムジーの定理 RT，すなわち $\forall k \forall l(\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^k_l)$ を直接 ACA_0 で導くことはできない．実際，無限ラムジーの定理から PH を導く通常の方法から $\mathrm{ACA}_0 \vdash \mathrm{RT} \to \mathrm{PH}$ がわかる．よって，定理 1.10 と定理 3.10 より，RT は ACA_0 で証明できない．定理 3.14 から算術的集合全体のなす集合 ARITH が ACA_0+RT のモデルであることもわかる．よって，ACA_0+RT から ATR_0 を導くことはできない．また RT は，算術的超限再帰の非常に制限された形「$\exists Y \mathrm{H}_\theta(\mathbb{N}, Y)$，ただし θ は算術的論理式」から ACA_0 で証明できる [Jockusch 1972]．つまり，ACA_0+RT は ACA_0 と ATR_0 の中間に位置する．このように RT は逆数学に現れる五つの体系のどれにも属さない主張である．

しかし定理 3.11 から RT の着色の領域の指数を $k \in \omega$ に制限したものは ACA_0 で証明できる．この主張は ACA_0 と同値である．

定理 3.12 RCA_0 でつぎが同値である．

(1) ACA_0.

(2) $\forall l(\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^k_l)$（ただし k は $3 \le k \in \omega$ であるどの k でもよい）.

証明 (1) ⇒ (2) は定理 3.11 より明らかである．(2) ⇒ (1) を示す．$\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^3_2$ から ACA_0 を導けばよい．証明のアイデアは，ジョクシュの結果 [Jockusch 1972] を RCA_0 において形式化することである．

9) PA で定義される各関数は順序数 $\alpha < \epsilon_0$ をうまくとると f_α で支配される（クライゼルの定理）．このことからも PH が PA で証明できないことがわかる．

任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(m)$ をとる．定理 1.20 より，$\forall m(m \in X \leftrightarrow \varphi(m))$ となる集合 X が存在すればよい．$\varphi(m)$ はある Σ^0_0 論理式 $\theta(m,n)$ を用いて $\varphi(m) \leftrightarrow \exists n\theta(m,n)$ と表されているとする．2 着色 $f : \mathbb{N}^3 \to \{0,1\}$ をつぎで定義する．

$$f(a,b,c) = \begin{cases} 1 & (\forall m < a(\exists n < c\theta(m,n) \to \exists n < b\theta(m,n)) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

$\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^3_2$ より，f に対する無限等質集合 H が存在する．このとき，ある $a \in H$ を考えると十分大きな d に対して，$\forall m < a(\exists n\theta(m,n) \to \exists n < d\theta(m,n))$ である．H は無限集合だから，$d < b < c$ となる $b, c \in H$ をとれば，$f(a,b,c) = 1$ となる．したがって，$[H]^3$ における f の値はつねに 1 である．したがって，

$$\exists n\theta(m,n) \leftrightarrow \forall a\forall b((a \in H \wedge b \in H \wedge m < a < b) \to \exists n < b\theta(m,n))$$

となり，再帰的内包公理より，$\forall m(m \in X \leftrightarrow \varphi(m))$ となる集合 X が存在する．■

定理 3.12 において，k が 3 以上であることは意味がある．RCA_0 において，$\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^2_2$ から ACA_0 が導けるかどうかは長い間未解決であったが，シータパンによって，$\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^2_2$ から ACA_0 は証明できないことがわかった [Seetapun and Slaman 1995]．$\mathrm{WKL}_0+\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^2_2$ からも ACA_0 は示せない．現在では，この結果に対するいろいろな証明が知られている．また WKL_0 から $\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^2_2$ は証明できない [Jockusch 1972]．しかし，$\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^2_2$ から WKL_0 が証明できるかどうかは未解決である．少し古い内容ではあるがこのあたりのくわしいことが [Cholak *et al.* 2001] にある．

ラムジー理論[10)]の他にも，組み合わせ論の定理には逆数学において未解決なものが多い．その一つにつぎのクラスカルの定理がある．

定理 3.13（クラスカル） 有限木全体のなす集合は埋め込みによる自然な準順序 (quasiordering) によって整列準順序 (well quasiordering) である．すな

10) ラムジー理論に登場する有名な定理にヒグマンの定理がある．ヒグマンの定理は RCA_0 上 ACA_0 と同値である．

わち，任意の有限木の無限列 $\langle T_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ には，T_i を T_j に埋め込む $i < j$ が存在する．

フリードマンはクラスカルの定理からケーニヒの補題を用いて簡単に導けるつぎの有限形を考えた．

定理 3.14（有限クラスカルの定理） 任意の正の整数 c に対し，つぎを満たす n が存在する: n 個の有限木の有限列 $\langle T_m : m < n\rangle$ で，各 T_m の要素の個数が cm 以下となるものには，T_i を T_j に埋め込む $i < j$ が存在する．

ラムジー関数と同様に，各 c に対して，上の定理を成り立たせるような最小の n をわりふる関数を $FK(c)$ とすると，これは，ラムジー関数や PH よりもはるかに速く増加する．実際に FK は Γ_0 番目の急増加関数 f_{Γ_0} を支配する．ATR_0 の証明論的順序数が Γ_0 であることを考えると，クラスカルの定理とその有限形は ATR_0 で証明できないことがわかる．このように，有限クラスカルの定理は PA の独立命題である．

クラスカルの定理は，有限木の各枝に正の整数で重みを付けて準順序を拡張しても成り立つ．これをクリツの定理という．クリツの定理が Π^1_1-CA_0 から導けるかどうかは未解決である．以上でみたように，無限組み合わせ論の定理は，PA の独立命題にも関わり，逆数学にも多くの問題を与える興味深い分野といえよう．これもまた少し古いが PA の独立命題と組み合わせ論の結果のまとまった内容が [Simpson 1987] にある．

3.2 フリードマンの定理とヒルベルトのプログラム

3.2 節では，逆数学とヒルベルトのプログラムを結びつけるフリードマンの定理「Π^0_2 文に関して，PRA で証明できるものと WKL_0 で証明できるものが変わらない」を紹介する．

フリードマンの定理の証明をする前に，ヒルベルトのプログラムとの関係について述べておこう．ヒルベルトのプログラム自体については本書の序文

や第 III 部 1.3 節に書かれており，他にも優れた著作が多いので，その歴史的意味や現代的解釈などについては省略する．日本語で読めるものとしては，たとえば，[林・八杉 2006] の解説や [渕野 2006; ジャキント 2007] に，2 階算術や逆数学との関係も含めてまとまって述べられている．またフィファーマンの評論集 [Feferman 1998] にも関連する話題が多くある．

T_1, T_2 を，共通の言語 $\mathcal{L}$ をもつ形式体系で，第 I 部で述べられているようなゲーデル数を用いた議論が可能であるものとする[11]．また，Γ は $\mathcal{L}$ の文からなる集合とする．つぎの 2 条件を満たす原始再帰的関数 f が存在するとき Γ に関して T_1 は T_2 に還元されるという[12]．

(1) 各 $\varphi \in \Gamma$ に対し，p が φ の T_1 の証明（のゲーデル数）ならば，$f(p)$ は φ の T_2 の証明（のゲーデル数）である．

(2) (1) を形式的に表したものは T_2 で証明できる．

簡潔にいうと，ヒルベルトのプログラムの目的は，一般の抽象的または超限的な数学の議論の妥当性を有限の立場で保証することにある．それは，数学の多くの領域が展開できる十分に大きい形式体系の無矛盾性を有限の立場で証明することによって達成されるはずのものであった．有限の立場についてヒルベルト自身が何らかの明確な定義を与えているわけではなく，本来は特定の形式体系とみなすものでもない．しかし，原始再帰的算術の形式体系 PRA を狭い意味での有限の立場を形式化したものとみてよい十分な根拠がある [Tait 1981]．このような見方でヒルベルトのプログラムに対応する還元性の問題を考えると，それは

(*) Π^0_1（に相当する文の集合）に関して，Z_2 や ZFC のような十分に大きな形式体系は PRA に還元することができる

ことを示すことになる．もし，Π^0_1 に関して形式体系 T が PRA に還元されるならば，T で証明される Π^0_1 文はどれも PRA で証明される（とくに，文 $0 = 1$ を考えれば，PRA が無矛盾ならば T は無矛盾である．さらに先の条件 (2) から，このような相対無矛盾性は PRA で証明できる）．しかし，不完全性定理によれば，(*) のような完全な形の還元性は不可能である．

11) より正確には（適切な解釈によって）PRA を含む（と考えられる）RE 理論とする．
12) [Feferman 1964] に正確な定義がある．

ところで，フリードマンの定理によると，WKL_0 で証明される Π^0_1 文はどれも PRA で証明される．さらに，以下で紹介するフリードマンの定理の証明はモデル論的なものであるが，証明論的な証明も知られており [Sieg 1985; Parsons 1970; Avigad 1996]，この定理自身が実際に PRA で証明できる．このようにして Π^0_1 に関して WKL_0 は PRA に還元される[13]．しかも，第 2 章で述べたように，Z_2 や ZFC とまではいかないが，WKL_0 では多くの数学を展開することができる．これは (*) の主張の部分的実現といえるだろう．これを称して，シンプソンは [Simpson 1988] において，ヒルベルトのプログラムの部分的実現と呼んでいる[14]．

以上の結果とも関係することであるが，フリードマンの定理の実用的な応用として，原始再帰的関数による計算がある．Π^0_2 文は $\forall m \exists n p(m,n)$ の形をしている．ここで，$p(m,n)$ は Σ^0_0 論理式である．したがって，この Π^0_2 文は $p(m,n)$ で定義されるような関数が「全域的」であることを示している．もし，$\forall m \exists n p(m,n)$ が PRA で証明できるならば，パリクの定理からある原始再帰的関数 f で，$\forall m \exists n \leq f(m) p(m,n)$ が成り立つようなものがある．これは，p が Σ^0_1 の場合でも成り立つ．WKL_0 では解析的性質も含めかなりの抽象的な議論も展開できる．したがって，フリードマンの定理から，ある程度一般の数学的議論で値の存在さえ確かめられれば，たとえ，具体的な原始再帰的計算法が知られてなくても，そのようなものが存在することが保証されるのである[15]．

フリードマンの定理の証明の前にいくつか定義を与えよう．まずはじめに，

---

13) 実際には Π^0_2 に関していえる．

14) このような部分的実現は WKL_0 よりある程度強い体系でも可能であることが知られている [Brown and Simpson 1993]．有限の立場に対して，ワイルやポアンカレなどに始じまる可述的な立場 (predicativism)[Weyl 1960] というものもある（第 III 部 1.1 節参照）．一連の研究からフィファーマンは可述的解析学に対応する形式体系として IR を導入した．IR は，Δ^1_1 内包原理，原始再帰的整列順序に関する算術的超限再帰および原始再帰的整列順序に関する算術的超限帰納法からなる体系である [Feferman 1964]．ATR_0 は数学の展開としては IR よりもずっと強い体系である．しかし，ATR_0 と IR は Π^1_1 文に関して証明できるものが同じである [Friedman *et al.* 1980]．この意味で，Π^1_1 文に関して ATR_0 は形式的な可述的立場に還元される．

15) 実用性さえ考えなければ，WKL_0 で展開されるような一般の証明から原始再帰的な計算法を導きだすこともできる．

原始再帰的算術の形式体系 PRA について確認しておく．PRA は原始再帰的算術 (primitive recursive arithmetic) の頭文字をとったものであり，その言語は，通常の（等号付き）1 階述語論理の言語で，原始再帰的関数に対応する関数記号をもつものである．すなわち，定数記号 0，ゼロ関数を表す記号 Z，後者関数を表す記号 S，射影関数を表す記号 P_i^k をもつ．さらに，すべての原始再帰的関数（の定義）に対しそれに対応する関数記号をもつ．PRA の公理は，各関数記号に対する定義式を公理としてもつ[16)]，さらに，量化記号を含まない論理式に制限された数学的帰納法を公理にもつ（第 I 部第 2 章 2.4 節）．有界量化記号 $\exists x < t, \forall x < t$ の操作が原始再帰法で閉じていることの証明を形式化することで，PRA は（$\mathcal{L}_1$ を拡張した PRA の言語の）Σ_0^0 論理式に関する帰納法をもつとしてよい．また，1.3 節の議論から RCA_0 は PRA を拡張したものとみなせる．とくに RCA_0 の任意のモデルの 1 階部分は，自然に PRA のモデルになることもわかる．

定義 3.15　$\mathcal{M}$ を PRA のモデルとし，M を $\mathcal{M}$ の領域とする．

(1) $X \subseteq M$ はある 0-1 有限列（のコード）$\sigma \in M$ で表せるとき，すなわち，任意の $i \in M$ に対して，$\mathcal{M} \models \sigma(i) = 1 \Leftrightarrow i \in X$ となるとき，$\mathcal{M}$ 有限という．また上のような σ で最後の値 $\sigma(\mathrm{lh}(\sigma) - 1)$ が 1 のものがただ一つ定まる．これを X のコードという（以下では X とそのコード σ_X を同一視する）．

(2) $\mathcal{M}$ における X の要素の個数を $\#(X)$ と書く（$\#$ は，$\mathcal{M}$ における原始再帰的関数とみなせる．すなわち，$\#$ はある PRA の関数記号 f の $\mathcal{M}$ における解釈となる）．

定義 3.16　$\mathcal{M}$ を PRA のモデルとし，$I \subseteq_e \mathcal{M}$ とする．

(1) $X \subseteq I$ は，ある $\mathcal{M}$ 有限集合 X^* で $X = X^* \cap I$ となるとき，$\mathcal{M}$ でコードされるという．$\mathrm{SSy}_I(\mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ でコードされる I の部分集合全体の集合とする（SSy は standard system の略である）．

(2) $X \subseteq I$ は，ある $n \in I$ で，$X \subseteq \{m : \mathcal{M} \models m < n\}$ となるとき，I で有界であるという．

16)　第 I 部第 1 章 1.3 節参照．

(3) つぎの条件を満たす切断 $I \subseteq_e \mathcal{M}$ を半正則 (semi-regular) であるという．$\#(X) \in I$ となる任意の $\mathcal{M}$ 有限集合 X に対し，$X \cap I$ は I で有界となる．

補題 3.17 $\mathcal{M}$ を PRA のモデルとし，I を $\mathcal{M}$ の半正則な切断とする．このとき，

$$\mathcal{I} = (I, \mathrm{SSy}_I(\mathcal{M}), 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}\lceil I, \cdot^{\mathcal{M}}\lceil I, <^{\mathcal{M}}\lceil I)$$

は WKL_0 のモデルである．ここで $\lceil I$ は I 上への制限を表す．

証明 I の半正則性から，$\mathcal{I}$ は $\mathcal{L}_2$ 構造となり，また基本公理を満たすのは明らかである[17]．

まず，$\mathcal{I}$ は Σ^0_1 帰納法を満たすことを示す．$\varphi(x)$ を $\mathcal{I}$ のパラメータ付き Σ^0_1 論理式とする．φ に対する帰納法が成り立たないと仮定して矛盾を導く．$\mathcal{I} \models \varphi(0) \land \forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1))$ とする．いま，$\mathcal{I} \models \neg\varphi(c)$ となる $c \in I$ があるとする．このとき，$Y = \{a \in I : \mathcal{I} \models a < c \land \varphi(a)\}$ とする．φ の各集合パラメータを対応する $\mathcal{M}$ 有限集合で置き換えた論理式を考えると，I が半正則であることから，Y は $\mathcal{M}$ 有限だとわかる．$c \notin Y$ なので．Y（のコード）を用いた数学的帰納法から Y に属さない最小の $b \in \mathcal{I}$ がある．これは帰納法の仮定に矛盾する．よって，$\mathcal{I}$ は Σ^0_1 帰納法を満たす．

定理 1.25 の後に述べたように，再帰的内包公理と弱ケーニヒの補題を満たすことを示すには，Σ^0_1 分離原理を満たすことを示せばよい．

パラメータ付き Σ^0_1 論理式 $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ は $\mathcal{I} \models \neg\exists x(\varphi_0(x) \land \varphi_1(x))$ を満たしているとする．$\varphi_i(x)$ の集合パラメータを $\mathcal{M}$ 有限集合で置き換えた $\mathcal{M}$ におけるパラメータ付き Σ^0_1 論理式を $\varphi^*_i(x)$ とする．各 $\varphi^*_i(x)$ はある Σ^0_0 論理式 $\theta^*_i(x, y)$ で $\exists y \theta^*_i(x, y)$ と表せる．$d \in M - I$ に対して，

$$Y^* = \{a \in M : \mathcal{M} \models a < d \land \exists b < d(\theta^*_0(a, b) \land \forall x < b \neg\theta^*_1(a, x))\}$$

とおくと，Y^* は $\mathcal{M}$ 有限だから，$Y = Y^* \cap I \in \mathrm{SSy}_I(\mathcal{M})$．また，このとき，

$$\mathcal{I} \models \forall a[(\varphi_0(a) \to a \in Y) \land (\varphi_1(a) \to a \notin Y)]$$

17) 実際，$\mathcal{I}$ の 1 階部分は PRA のモデルでもある．

である．よって，$\mathcal{I}$ は Σ^0_1 分離原理を満たす．

以上から，$\mathcal{I} \models \mathrm{WKL}_0$ が証明された． ■

補題 3.18 $\mathcal{M}$ を PRA の可算モデルとする．$c, d \in M$ は，すべての 1 変数原始再帰的関数記号 f に対して，$\mathcal{M} \models f(c) < d$ であるとする．このとき，$c \in I$ かつ $d \notin I$ となる半正則切断 $I \subseteq_e M$ が存在する．

証明 $\mathcal{M}$ を PRA の可算モデルとする．$a, b \in M$ に対し，$[a, b) = \{m \in M : \mathcal{M} \models a \leq m < b\}$ と表す．$n \in M$ に対し，区間 $[a, b)$ が n 大であることを $\mathcal{M}$ で原始再帰的につぎで定める．$a < b$ のとき，区間 $[a, b)$ は 0 大である．任意の $\mathcal{M}$ 有限集合 X に対し，$\mathcal{M} \models \#(X) \leq b$ ならば，

$$\mathcal{M} \models [a', b') \cap X = \emptyset \wedge a < a' < b' < b$$

となる n 大 $[a', b')$ が存在するとき，区間 $[a, b)$ は $(n+1)$ 大である[18]．

各標準自然数 $n \in \omega$ に対して，1 変数関数の原始再帰的関数 g_n をつぎで定める．

$$\begin{aligned} g_0(x) &= x + 1, \\ g_{n+1}(x) &= \overbrace{g_n \circ g_n \circ \cdots \circ g_n}^{x+1}(x+1) + 1. \end{aligned}$$

このとき各 $n \in \omega$ について，$\mathcal{M} \models g_n(y) \leq z$ ならば，区間 $[y, z)$ は n 大である．

そこで，$c, d \in \mathcal{M}$ を題意のようにとる．仮定から，任意の $n \in \omega$ について，区間 $[c, d)$ は n 大である．$\mathcal{M} \models m \geq c - d$ ならば区間 $[c, d)$ は m 大ではないから，区間 $[c, d)$ が α 大となる $\mathcal{M}$ での最大元 α をとる．

$\mathcal{M}$ は可算なので $\mathcal{M}$ 有限集合は可算個しかない．そこで $\{X_n\}_{n \in \omega}$ を $\mathcal{M}$ 有限集合をすべて並べたものとする．ただし，各 $\mathcal{M}$ 有限集合はそのなかで無限回くり返し現れるものとする．このとき，つぎの性質をもつ縮小区間列 $\{[c_n, d_n)\}_{n \in \omega}$ をとる．

$$[c_0, d_0) = [c, d),$$

18) つまり，「区間 $[a, b)$ は n 大である」はある原始再帰的述語の $\mathcal{M}$ における解釈とみなせるということである．

$$[c_{n+1}, d_{n+1}) = \begin{cases} [c_n + 1, d_n - 1) & (\mathcal{M} \models c_n \leq \#(X_n) \text{ のとき}) \\ [c', d') & (\mathcal{M} \models c_n > \#(X_n) \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし，$[c', d')$ は，$\mathcal{M} \models ([c', d') \cap X_n = \emptyset) \wedge (c_n < c' < d' < d_n)$ となる $(\alpha - n - 1)$ 大である．

$I = \{a \in M : \exists n \in \omega(\mathcal{M} \models a < c_n)\}$ とする．この I が半正則切断であることをみればよい．

つくり方から切断であることは明らかである．X を $\#(X) \in I$ となる $\mathcal{M}$ 有限集合とすると，十分大きな n で，$X = X_n$ かつ $\mathcal{M} \models \#(X) < c_n$ となるものがある．このとき，$\mathcal{M} \models [c_{n+1}, d_{n+1}) \cap X = \emptyset$．よって，$X \cap I \subseteq \{a \in M : \mathcal{M} \models a < c_{n+1}\}$，つまり，$X \cap I$ は I で有界．したがって I は半正則である． ■

定理 3.19（フリードマン）[Friedman 1976]　任意の Π^0_2 文 σ に対して，$\mathrm{WKL}_0 \vdash \sigma \Leftrightarrow \mathrm{PRA} \vdash \sigma$ が成り立つ．

証明　$\mathrm{WKL}_0 \vdash \sigma \Rightarrow \mathrm{PRA} \vdash \sigma$ は明らかなので，$\mathrm{PRA} \vdash \sigma \Rightarrow \mathrm{WKL}_0 \vdash \sigma$ を示す．σ を PRA で証明できない Π^0_2 文とする．σ はある Σ^0_0 論理式 $\theta(x, y)$ で $\forall y \exists z \theta(y, z)$ と表せる．述語論理のコンパクト性定理から，

$$\mathrm{PRA} \cup \{\neg\exists z\theta(c, z)\} \cup \{f(c) < d : f \text{ は 1 変数原始再帰的関数の記号 }\}$$

は可算モデル $\mathcal{M}$ をもつ．補題 3.18 により，$c \in I$ かつ $d \notin I$ となる半正則切断 $I \subseteq_e \mathcal{M}$ が存在する．ここで，

$$\mathcal{I} = (I, \mathrm{SSy}_I(\mathcal{M}), 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}\lceil I, \cdot^{\mathcal{M}}\lceil I, <^{M}\lceil I)$$

とすると補題 3.17 より，$\mathcal{I}$ は WKL_0 のモデルである．ところが，$\neg\exists z\theta(c, z)$ は Π^0_1 文で，$\mathcal{M} \models \neg\exists z\theta(c, z)$ だから，$\mathcal{I} \models \neg\exists z\theta(c, z)$，すなわち $\mathcal{I} \models \neg\sigma$ である．

以上より $\mathrm{WKL}_0 + \neg\sigma$ はモデルをもつので，σ は WKL_0 で証明できない． ■

3.3　フリードマンの原則 II

逆数学の出発となったフリードマンの講演 [Friedman 1974] では，集合存在公理に関する二つの原則が述べられている．一つめの原則は，いわゆる逆数学の原則（2.2 節参照）であり，残りの一つがつぎである．

> **原則 II**　定義するのが困難な自然数の集合を明示的に定義するのは，それらの存在を示すだけよりもはるかに難しい．

3.3 節では，この事実を示す結果について紹介する．その前にまず定義を一つ述べておく．

定義 3.20　$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}_2$ 構造とする．$\mathcal{M}$ の 1 階領域の部分集合 $A \subseteq M$ は，ある（パラメータなしの）$\mathcal{L}_2$ 論理式 $\varphi(X)$ で，$\mathcal{M} \models \varphi(A)$ となる（$S_{\mathcal{M}}$ の中の）ただ一つの集合であるとき，$\mathcal{M}$ 上定義可能[19)]という．

定理 3.21　定義可能な集合はすべて再帰集合である WKL_0 の ω モデル S が存在する．

WKL_0 の ω モデル S には再帰的でない集合も属するわけだが，上の定理によるモデルでは，そのようなものは定義できないわけである．この意味で原則 II はある種の再帰的でない集合についてあてはまる．

ここでは定理 3.21 のシンプソンによる，対称強制法 (symmetric forcing) を用いた簡単な証明を紹介する [Simpson 2005]．ただし，再帰理論の知識はある程度仮定する．なお，ほぼ同じような議論でつぎの定理も証明できる．

定理 3.22　定義可能な集合はすべて超算術的集合である ATR_0 の β モデルが存在する．

---

19)　2 階領域 $S_{\mathcal{M}}$ に関してこれは 1.1 節で述べた定義可能性と同じものと考えてよい．すなわち，集合 A が，1.1 節の「定義可能性」の意味で $\psi(n)$ で定義されるとすると，$\varphi(X)$ を $\forall n \in \mathbb{N}(n \in X \leftrightarrow \psi(n))$ とすれば，定義 3.20 の意味で定義可能である．また逆に，A が定義 3.20 の意味で $\varphi(X)$ で定義可能であるときは，$\exists X(n \in X \land \varphi(X))$ によって，1.1 節の意味で定義可能となる．

以下では，集合とその特性関数は同一視する．よって，$\mathcal{P}(\omega)$ と 2^ω は同じものである．X のみを自由変数にもつ Π^0_1 論理式 $\varphi(X)$ を用いて，$\{X \subseteq \omega : \mathcal{P}(\omega) \models \varphi(X)\}$ と表せるものを，2^ω の Π^0_1 クラスという．$A \subseteq 2^\omega$ が Π^0_1 クラスであることと，ある再帰的 0-1 木 T の道全体のなす集合 $[T]$ であることは同値である．

定義 3.23　2^ω の Π^0_1 クラスを再帰的にすべて並べたものを $\langle P_e : e \in \omega\rangle$ とする[20]．$\omega \times \omega^{<\omega}$ の有限集合 p に対して，

$$\forall (e,\sigma) \in p\ (X_{\sigma(0)} \oplus \cdots \oplus X_{\sigma(\mathrm{lh}(\sigma)-1)} \in P_e)$$

となるとき，集合列 $\langle X_n : n \in \omega\rangle$ は p と触れるという．

$$\begin{aligned}\mathbb{P} = \{p \subseteq \omega \times \omega^{<\omega} : &p \text{ は有限集合で，} \mathcal{P}(\omega) \text{ において } p\\ &\text{と触れる } \langle X_n : n \in \omega\rangle \text{ が存在する }\}\end{aligned}$$

とする．また $\mathbb{P}$ 上に，$p \supseteq q$ で半順序 $p \leq q$ を定める．

$D \subseteq \mathbb{P}$ は，$\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in D(q \leq p)$ であるとき，稠密という．集合列 $\langle G_n : n \in \omega\rangle$ は，$\mathbb{P}$ の任意の定義可能な稠密集合 D に対して，D のある要素 p に触れるとき，ジェネリックという．

補題 3.24　$\varphi(X)$ を Π^0_1 論理式とする．このとき，WKL_0 において，$\exists X \varphi(X)$ はある Π^0_1 論理式と同値である．

証明　[Simpson 1999, Lemma VIII.2.6] をみよ．■

補題 3.25　任意の $p \in \mathbb{P}$ に対して，p と触れるジェネリック $\langle G_n : n \in \omega\rangle$ が存在する．

証明　任意の $q \in \mathbb{P}$ に対し，$[q]$ を q に触れる $\langle X_n : n \in \omega\rangle$ 全体のなす集合とする．$[q]$ は $(2^\omega)^\omega$ 上の閉集合である．G を $p \in G$ となる $\mathbb{P}$ 上のジェネリック・フィルターとすると，$(2^\omega)^\omega$ のコンパクト性より $\bigcap\{[q] : q \in G\} \neq \emptyset$ となる．このとき，$\langle G_n : n \in \omega\rangle \in \bigcap\{[q] : q \in G\}$ をとればよい．■

20)「再帰的に並べたもの」の意味は，x, X のみを自由変数にもつ Π^0_1 論理式 $\varphi(x, X)$ で，任意の $e \in \omega$, $A \subseteq \omega$ に対し，$A \in P_e \Leftrightarrow \mathcal{P}(\omega) \models \varphi(e, A)$ となるもののことをいう．

補題 3.26 任意のジェネリック $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ に対し，$\{G_n : n \in \omega\}$ は WKL_0 の ω モデルである．

証明 $\{G_n : n \in \omega\}$ が Σ^0_1 分離原理を満たすことを示せばよい．$G_{n_1}, \ldots, G_{n_k}$ のみをパラメータにもつ二つの Σ^0_1 論理式 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ は，$\{G_n : n \in \omega\} \models \forall n \neg(\varphi(n) \wedge \psi(n))$ を満たすとする．算術的論理式は集合に関する量化記号をもたないので，$\mathcal{P}(\omega)$ でも $\forall n \neg(\varphi(n) \wedge \psi(n))$ が成り立つ．

$$X \oplus G_{n_1} \oplus \cdots \oplus G_{n_k} \in P_e \Leftrightarrow \mathcal{P}(\omega) \models \forall n((\varphi(n) \to n \in X) \wedge (\psi(n) \to n \notin X))$$

となる $e \in \omega$ をとる．$\mathcal{P}(\omega)$ では Σ^0_1 分離原理が成り立つから，$\exists X(X \oplus G_{n_1} \oplus \cdots \oplus G_{n_k} \in P_e)$ である．補題 3.24 より，$G_{n_1} \oplus \cdots \oplus G_{n_k} \in P_{e'}$ となる e' が存在する．$D \subseteq \mathbb{P}$ を

$$p \in \mathbb{P} \wedge ((p \cup \{(e', \langle n_1, \ldots, n_k \rangle)\} \notin \mathbb{P}) \vee \exists n((e, \langle n, n_1, \ldots, n_k \rangle) \in p))$$

で定める．D は稠密なので，ジェネリック $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ はある $p \in D$ に触れる．D の定義より，$G_m \oplus G_{n_1} \oplus \cdots \oplus G_{n_k} \in P_e$ となる $m \in \omega$ が存在する．したがって，$\mathcal{P}(\omega) \models \forall n((\varphi(n) \to n \in G_m) \wedge (\psi(n) \to n \notin G_m))$ となり，ふたたび算術的論理式の性質により $\{G_n : n \in \omega\} \models \forall n((\varphi(n) \to n \in G_m) \wedge (\psi(n) \to n \notin G_m))$ となる． ■

補題 3.27 $p \in \mathbb{P}$, $m \in \omega$ とする．p と触れるどの $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ に対しても，m 番目の集合 X_m が同じ A であるなら，A は再帰的である．

証明 A は補題の条件を満たしているとする．このとき，任意の $l \in \omega$ に対して，

$$\begin{aligned} l \in A &\Longleftrightarrow \forall \langle X_n : n \in \omega \rangle (\langle X_n : n \in \omega \rangle \text{ が } p \text{ と触れるなら，} l \in X_m) \\ &\Longleftrightarrow \exists \langle X_n : n \in \omega \rangle (\langle X_n : n \in \omega \rangle \text{ は } p \text{ と触れ，} l \in X_m) \end{aligned}$$

となる．補題 3.24 より，2 番目の式は Σ^0_1, 3 番目の式は Π^0_1 なので，A は再帰的である． ■

補題 3.28 C は $C \cap \mathrm{REC} = \emptyset$ である可算集合とし，$p \in \mathbb{P}$ とする．このとき，$C \cap \{G_n : n \in \omega\} = \emptyset$ を満たす，p に触れるジェネリック $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ が存在する．

証明 $A \in C, m \in \omega$ をとる．$D_{A,m}$ を

$$D_{A,m} = \{p \in \mathbb{P} : \forall \langle X_n : n \in \omega \rangle (\langle X_n : n \in \omega \rangle \text{ が } p \text{ と触れるなら，} X_m \neq A)\}$$

で定める．

$D_{A,m}$ は稠密であることを示す．$p \in \mathbb{P}$ とする．A は再帰的ではないので，補題 3.27 より，p と触れる $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ で $X_m \neq A$ となるものがある．つまり，ある自然数 l で，$l \in X_m \not\Leftrightarrow l \in A$ である．このとき，$\mathcal{A} = \{X : l \in X_m \not\Leftrightarrow l \in A\}$ は Π^0_1 クラスなので，ある自然数 e で，$\mathcal{A} = P_e$ となる．よって，$p \cup \{(e, \langle m \rangle)\} \in D_{A,m}$ である．以上より $D_{A,m}$ の稠密性が示せた．

まず $\{D_{A,m} : A \in C, m \in \omega\}$ が稠密集合の可算集合であるから，補題 3.25 の証明を考えると，$D_{A,m}$ すべてに触れるジェネリック $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ がとれる．このとき，$C \cap \{G_n : n \in \omega\} = \emptyset$ である．■

定義 3.29 $\mathcal{L}_2$ に可算個の集合定数 $X_0, X_1, \ldots$ を加えた言語を $\mathcal{L}_2(\langle X_n : n \in \omega \rangle)$ とする．φ を $\mathcal{L}_2(\langle X_n : n \in \omega \rangle)$ の文とする．p に触れる任意のジェネリック $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ に対し，$\{G_n : n \in \omega\} \models \varphi$ となるとき，p は φ を強制するといい，$p \Vdash \varphi$ と書く．ただし，$\{G_n : n \in \omega\}$ において，各 X_n は G_n と解釈する．

強制法の標準的な議論によりつぎの補題が成り立つ．

補題 3.30 φ を $\mathcal{L}_2(\langle X_n : n \in \omega \rangle)$ の文とする．p に触れる任意のジェネリック $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ に対し，$\{G_n : n \in \omega\} \models \varphi$ ならば，$q \Vdash \varphi$ となるある $q \leq p$ に $\langle G_n : n \in \omega \rangle$ は触れる．

定義 3.31 π は ω から ω の全単射とする．このとき，$p \in \mathbb{P}$ と $\mathcal{L}_2(\langle X_n : n \in \omega \rangle)$ の文 φ に対し，それぞれ

$$\pi(p) = \{(e, \langle \pi(n_1), \ldots, \pi(n_k)\rangle) : (e, \langle n_1, \ldots, n_k\rangle) \in p\},$$
$$\pi(\varphi) = \text{「}\varphi \text{ の中の各 } X_n \text{ を } X_{\pi(n)} \text{ に置き換えたもの」}$$

と定める.

このとき $p \Vdash \varphi \Leftrightarrow \pi(p) \Vdash \pi(\varphi)$ である．また,

$$\mathrm{supp}(p) = \bigcup\{\{n_1, \ldots, n_k\} : (e, \langle n_1, \ldots, n_k\rangle) \in p\}$$

を $p \in \mathbb{P}$ のサポートという.

$p, q \in \mathbb{P}$ に対して，$\mathrm{supp}(p) \cap \mathrm{supp}(q) = \emptyset$ ならば，$p \cup q \in \mathbb{P}$ である．また，$\langle G_n : n \in \omega\rangle$ がジェネリックならば，ω から ω の全単射 π に対して，$\langle G_{\pi(n)} : n \in \omega\rangle$ もジェネリックである.

補題 3.32　任意の $p, q \in \mathbb{P}$ は，同じ $\mathcal{L}_2$ 文を強制する.

証明　φ を $\mathcal{L}_2$ 文とする．$p \Vdash \varphi, q \not\Vdash \varphi$ として矛盾を導く．このとき，$q' \Vdash \neg\varphi$ となる $q' \leq q$ が存在する．π を $\mathrm{supp}(\pi(p)) \cap \mathrm{supp}(q') = \emptyset$ となる ω から ω の全単射とする．$\pi(\varphi) = \varphi$ なので，$\pi(p) \Vdash \varphi$ である．よって，$\pi(p) \cup q' \Vdash \varphi$ となる．これは，$q' \Vdash \neg\varphi$ に矛盾する.　■

補題 3.32 から，二つのジェネリック $\langle G_n : n \in \omega\rangle$ と $\langle G'_n : n \in \omega\rangle$ によって得られる二つの ω モデル $\{G_n : n \in \omega\}$，$\{G_n : n \in \omega\}$ は同じ $\mathcal{L}_2$ 文を満たす．この結果と補題 3.28 を組み合わせると定理 3.21 が証明できる.

定理 3.21 の証明　ジェネリック $\langle G_n : n \in \omega\rangle$ に対し，$S = \{G_n : n \in \omega\}$ とする．これが求めるものであることを示そう．$A \in S$ は，S で定義可能であるとする．補題 3.28 より，$S' = \{G'_n : n \in \omega\}$ が $S \cap S' = \mathrm{REC}$ となるジェネリック $\langle G'_n : n \in \omega\rangle$ をとる.

$\varphi(X)$ を A を定義する $\mathcal{L}_2$ 論理式とする．すなわち $S \models \exists! X \varphi(X) \wedge \varphi(A)$ である[21]．S と S' は同じ $\mathcal{L}_2$ 文を成り立たせるから $S' \models \exists! X \varphi(X)$ である．$A' \in S'$ を $S' \models \varphi(A')$ となる唯一のものとする．このとき $n \in \omega$ に対し,

21)　$\exists! X \varphi(X)$ は「φ を満たす X が一意に存在する」ことを意味する.

$$
\begin{aligned}
n \in A &\iff S \models \exists X(\varphi(X) \wedge n \in X) \\
&\iff S' \models \exists X(\varphi(X) \wedge n \in X) \iff n \in A'
\end{aligned}
$$

である．よって $A = A'$ となり，$S \cap S' = \mathrm{REC}$ なので，A は再帰的集合となる． ■

また，任意の集合 Y に対し，定義 3.23 を相対化したものを考えると，パラメータを認めるように拡張した定義可能性についてのつぎの結果を得る．

定理 3.33 「$\forall X, Y(X$ は Y のみをパラメータに使って定義可能ならば，$X \leq_{\mathrm{T}} Y)$ である」を満たす WKL_0 の ω モデルが存在する．

以上の議論は ω モデルにこだわる必要がなく，WKL_0 の可算モデルにおいて同様の議論をすることができる[22)]．このことと，つぎのハーリントンの補題から定理 3.35 が示せる．

補題 3.34（ハーリントン） $\mathcal{M}$ を RCA_0 の可算モデルとする．このとき，つぎの 2 条件を満たす WKL_0 のモデル $\mathcal{M}'$ が存在する．

(1) $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M}'$ の部分構造である．

(2) $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}'$ は 1 階部分が等しい．

定理 3.35 $\varphi(X, Y)$ を X, Y のみを自由変数にもつ算術的論理式とする．このとき，$\mathrm{WKL}_0 \vdash \forall X \exists! Y \varphi(X, Y)$ ならば，$\mathrm{RCA}_0 \vdash \forall X \exists! Y \varphi(X, Y)$ である．

証明 $\mathrm{WKL}_0 \vdash \forall X \exists! Y \varphi(X, Y)$ とする．$\mathrm{RCA}_0 \not\vdash \forall X \exists! Y \varphi(X, Y)$ と仮定して矛盾を導く．このとき，完全性定理より，$\mathcal{M} \models \neg \exists! Y(\varphi(A, Y))$ となる $A \in S_M$ をもつ RCA_0 の可算モデル $\mathcal{M}$ がある．

まず，$\mathcal{M} \models \exists Y \varphi(A, Y)$ とする．補題 3.34 より，$S_M \subseteq S_{M'}$ かつ $\mathcal{M}$ と 1 階部分が等しい WKL_0 のモデル $\mathcal{M}'$ がある．明らかに $\mathcal{M}' \models \neg(\exists! Y \varphi(A, Y))$ であるので，$\mathrm{WKL}_0 \vdash \forall X \exists! Y \varphi(X, Y)$ に反する．

つぎに $\mathcal{M} \models \forall Y \neg \varphi(A, Y)$ とする．ここで，$\mathrm{REC}^{\mathcal{M}}(A) = \{X \subseteq M : \mathcal{M} \models X \leq_{\mathrm{T}} A\}$ とすると，$\mathcal{M}_0 = (M, \mathrm{REC}^{\mathcal{M}}(A), 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}})$

22) 実際には，このときにもつぎのハーリントンの補題をうまく使う．

は RCA_0 の可算モデルであり，$\mathcal{M}_0 \models \forall Y \neg\varphi(A,Y)$ である．補題 3.34 の直前のコメントのように，これまでの議論を一般化した結果より，$\{G'_n : n \in M\} \cap \{G''_n : n \in M\} = \mathrm{REC}^{\mathcal{M}}(A)$ となる二つのジェネリック $\langle G'_n : n \in M\rangle$，$\langle G''_n : n \in M\rangle$ が存在する．ここで，

$$\mathcal{M}_1 = (M, \{G'_n : n \in M\}, 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}),$$
$$\mathcal{M}_2 = (M, \{G''_n : n \in M\}, 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}})$$

とする．$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ は WKL_0 のモデルであり，同じ $\mathcal{L}_2$ 文を成り立たせる．

$i = 1, 2$ に対し，$\mathcal{M}_i \models \varphi(A, B_i)$ となる唯一の $B_i \in S_{M_i}$ をとる．このとき，任意の $n \in M$ に対し，

$$\begin{aligned} n \in B_1 &\iff \mathcal{M}_1 \models \exists Y(\varphi(A,Y) \wedge n \in Y) \\ &\iff \mathcal{M}_2 \models \exists Y(\varphi(A,Y) \wedge n \in Y) \\ &\iff n \in B_2, \end{aligned}$$

なので，$B_1 = B_2$ である．したがって，$B_1 \in \mathrm{REC}^{\mathcal{M}}(A)$ となり，$\mathcal{M}_0 \models \forall Y \neg\varphi(A,Y)$ に反する．■

3.4　逆数学の拡大

近年では，これまでの逆数学の枠組みを拡大した研究もなされている．ここで紹介する代表的な流れはつぎの三つである．

(1) 基本体系を RCA_0 より弱い体系にする．

(2) Π^1_1-CA_0 よりも強い体系の逆数学を調べる．

(3) 2 階の言語 $\mathcal{L}_2$ を離れて，3 階算術，高階算術で逆数学を調べる．

これを 3.4 節では順に概説していこう．まず方向 (1) について述べる．第 2 章で述べたように逆数学研究は RCA_0（ときには ACA_0）を基本体系とす

る．すなわち，ある定理と体系の同値性は RCA_0 上で与えられる．逆数学研究の拡張の一つは，この基本体系を RCA_0 より弱くすることである．現在，この方面の研究は主に 2 方向に分かれている．

(1.1) $\mathrm{RCA}_0{}^*$ を基本体系にした逆数学 [Simpson and Smith 1986].

(1.2) BTFA を基本体系にした逆数学 [Ferreira 1994; Fernandes and Ferreira 2002].

$\mathrm{RCA}_0{}^*$ や BTFA は，RCA_0 の数学的帰納法（Σ^0_1 帰納法）をさらに制限した体系といえる．(1.1) は，主に代数の領域の定理で，RCA_0 で証明されるものが Σ^0_1 帰納法と同値となることを調べる．(1.2) は，主に解析の領域の定理で，RCA_0 や WKL_0 で示されるものがどれくらい強い数学的帰納法を必要とするかを調べることが多い．ここでは，前者について簡単に述べる．

$\mathrm{RCA}_0{}^*$ の言語は，2 階算術の言語に exp という 2 変数関数記号を付け加えたものである．

定義 3.36 $\mathrm{RCA}_0{}^*$ は，基本公理，再帰的内包公理，Σ^0_0 帰納法（帰納法に使う φ を Σ^0_0 論理式[23)]に限ったもの），さらに exp の定義式（$\exp(m,0)$, $\exp(m,n+1)=\exp(m,n)\cdot m$）からなる．

言語が拡張されているものの 1.3 節の議論により $\mathrm{RCA}_0{}^*$ は RCA_0 の真の部分体系となり，RCA_0 は $\mathrm{RCA}_0{}^*+\Sigma^0_1$ 帰納法のこととなる．ここでの具体的な目標は，$\mathrm{RCA}_0{}^*$ の上で数学の定理と Σ^0_1 帰納法の同値性を示すことである．その前に，Σ^0_1 帰納法がつぎの意味で「集合存在公理」とみなせることを確認しておこう．

定理 3.37 $\mathrm{RCA}_0{}^*$ において以下は同値である．

(1) Σ^0_1 帰納法（すなわち RCA_0）．

(2) 有界 Σ^0_1 内包公理：$\forall m \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow (\varphi(n) \wedge n < m)$[24)]，ただし $\varphi(n)$ は X を自由変数にもたない Σ^0_1 論理式である．

23) ただし，言語が拡張されていて exp は関数記号としてもっていることに注意する．

24) $\varphi(n)$ を満たす m 未満の数 n のなす集合 X が存在するということ．

証明　(1) $\Rightarrow$ (2) は容易である．(2) $\Rightarrow$ (1) を示す．$\mathrm{RCA_0}^*$ で考える．$\varphi(i)$ を Σ^0_1 論理式とし，$\varphi(0)$ かつ $\forall n(\varphi(n) \to \varphi(n+1))$ を仮定する．$m \in \mathbb{N}$ とする．有界 Σ^0_1 内包公理より，$\forall n \leq m(n \in X \leftrightarrow \varphi(n))$ となる集合 X がある．ここで，$\forall n(n \in Y \leftrightarrow (n \in X \vee n > m))$ となる集合 Y を考えれば，$0 \in Y$ かつ $\forall n(n \in Y \to n+1 \in Y)$ である．ゆえに Σ^0_0 帰納法より，$\forall n(n \in Y)$．とくに，$m \in Y$．よって，$\varphi(m)$．m は任意であったから $\forall n \varphi(n)$ となる．■

$\mathrm{RCA_0}$ 上で，ある定理から $\mathrm{ACA_0}$ を導くとき，実際には Σ^0_1 内包公理を導くことが多い（定理 1.20 と 2.2 節の $\mathrm{ACA_0}$ での逆数学参照）．上の定理は，$\mathrm{ACA_0}$ での有限版のような結果が得られるものと考えてよい．そこで，この様子がよくわかる最も代表的なものを 1 つあげてこの話を終わりにする．

定理 3.38　$\mathrm{RCA_0}^*$ 上でつぎは同値である．

(1) $\mathrm{RCA_0}$.

(2) 任意の可算体上の有限生成ベクトル空間は基底をもつ．

証明　まず，有限生成ベクトル空間が基底をもつことを $\mathrm{RCA_0}$ で証明する．V を可算体 K 上の有限生成ベクトル空間とする．ここで，$\varphi(n)$ を「V のある生成系 $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ が存在する」という論理式とする．このとき，初めに与えられた有限な生成系を利用して，$\varphi(n)$ は $\exists n \varphi(n)$ を満たす Σ^0_1 論理式であることがわかる．Σ^0_1 論理式に対する最小性原理により，φ を満たす最小元 m_0 がある．このとき，$\varphi(m_0)$ を成り立たせるための V の生成系 $(v_0, v_1, \ldots, v_{m_0})$ は V の基底となる．

つぎに，$\mathbb{Q}$ 上の有限生成ベクトル空間が基底をもてば有界 Σ^0_1-CA が成り立つことを示す．さて，ここで任意の m と任意の Σ^0_1 論理式 $\varphi(n)$ を一つ固定する．定理 1.20 を吟味すると，$\mathrm{RCA_0}^*$ において，$\varphi(n)$ に対し，$\forall n[(\exists i \in Y(f(i) = n) \leftrightarrow (\varphi(n) \wedge n < m)]$ となる集合 Y と 1-1 関数 $f : Y \to \mathbb{N}$ が存在することがわかる．いま，$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}\}$ を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上の有限生成ベクトル空間 V_0 をとる．ここで，

$$x'_k = x_{2f(k)} + k \cdot x_{2f(k)+1}$$

として V_1 を $X' = \{x'_k : k \in Y\}$ で生成される V_0 の部分ベクトル空間とする．商空間 $V_2 = V_0/V_1$ を考えて V_2 の基底を $X'' = \{x''_0, x''_1, \ldots, x''_l\}$ とすれば，$X' \bigcup X''$ は V_0 の基底である．このとき，n が f の値域になることと，(*)「x_{2n} もしくは x_{2n+1} が $X' \bigcup X''$ を使って表したときに，$f(m) = n$ となる x'_m を項にもつ」ことは同値である．$X' \bigcup X''$ は基底なのでその表し方が一意であることに注意すれば，(*) の主張は Π^0_1 で表せる．したがって，Δ^0_1 内包公理より f の値域（つまり，$\{n : \varphi(n) \wedge n < m\}$）は存在する． ■

つぎに研究の流れ (2) について述べよう．この方向に関する結果は田中による無限ゲームの決定性やラムジー性の研究 [田中 1989; 1990; 1991] が知られているが，ここではシンプソンとムマートによって与えられた例 [Mummert and Simpson 2005] を一つ紹介しておこう．

その前に ACA_0 において，完備可分距離空間より一般的な位相空間を扱えることに言及しておく．

定義 3.39 ACA_0 でつぎが定義できる．$(P, \leq)$ を半順序集合とする．$F \subsetneq P$ は，$\forall p \in F, q \in P(p \leq q \to q \in F)$ かつ $\forall p, q \in F \exists r \in F(r \leq p, q)$ を満たすとき，フィルター (filter) という．自分より大きなフィルターのないフィルターを極大フィルターという．F が $(P, \leq)$ の極大フィルターであることを，$X \in \mathrm{MF}((P, \leq))$，もしくは $\leq$ を省略して，$X \in \mathrm{MF}(P)$ と書く．

われわれは以下のように，この $\mathrm{MF}(P)$ を P を可算基にもつ位相空間（MF 位相空間）とみなす[25]．各 $p \in P$ は，基本開近傍 $N_p = \{X \in \mathrm{MF}(P) : p \in P\}$（のコード）のことである．

また，$L \subseteq P$ は $\mathrm{MF}(P)$ の開集合 $U_L = \cup_{p \in L} N_p$（のコード）のことである．さらに，$F \in U_L$ は $F \cap L \neq \emptyset$ のことである．

完備可分距離空間 $\hat{A} = (A, d)$ をとる．このとき，$P_{\hat{A}} = A \times \mathbb{R}^+$ とおき，$P_{\hat{A}}$ 上の半順序を $(a, r) < (b, s) \Leftrightarrow d(a, b) + r < s$ で定める．これによって，$\hat{A}$ の点 x と $P_{\hat{A}}$ 上の点 X に自然な対応関係が付く．また，開球 $B(a, r)$ は $N_{(a,r)}$ に対応する．このように，完備可分距離空間を MF 位相空間の一種とみなす．

25) すなわち，$(P, \leq)$ が MF 位相空間 $\mathrm{MF}(P)$ のコードである．

定義 3.40　ACA_0 でつぎが定義できる．$\mathrm{MF}(P), \mathrm{MF}(Q)$ を MF 位相空間とする．$\Phi_f \subseteq P \times Q$ はつぎの条件を満たすとき連続関数 $f : \mathrm{MF}(P) \to \mathrm{MF}(Q)$（のコード）という：任意の $F \in \mathrm{MF}(P)$ に対して，$F' = \{q \in Q : \exists p \in F((p,q) \in \Phi_f)\} \in \mathrm{MF}(Q)$．この F' を $f(F)$ と書く．

また，全射連続関数 $f : \mathrm{MF}(P) \to \mathrm{MF}(Q)$ は，自分自身もその逆像も連続関数であるとき（つまり，ともに連続関数のコードをもつとき）同相であるという．

定理 3.41　Π^1_1-CA_0 上でつぎは同値である．

(1) Π^1_2-CA_0．

(2) 正規 MF 位相空間の距離付け可能定理：任意の正規 MF 位相空間 $\mathrm{MF}(P)$ には，ある完備距離空間 $\hat{A}$ が存在し，$\mathrm{MF}(P)$ と $\mathrm{MF}(P_{\hat{A}})$ は同相になる．

証明　(1) $\Rightarrow$ (2) は，ウリゾンのオリジナルの証明に基づく．シュレーダーのアイデア [Schröder 1998] を用いて示せる．(2) $\Rightarrow$ (1) のアイデアはこうである．Σ^1_2 論理式 $\varphi(n)$ をとる．近藤・アディソンの補解析集合の一意化定理[26] と Π^1_1 論理式の標準化定理を用いて，つぎの性質をもつ P の部分集合列 $\langle X_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ と互いに共通部分をもたない基本開近傍の列 $\langle N_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ をもつ正規 MF 位相空間 $\mathrm{MF}(P)$ をつくる．

1. 任意の n について，$\neg\varphi(n)$ ならば，$X_n \notin \mathrm{MF}(P)$．
2. 任意の n について，$\varphi(n)$ ならば，$X_n \in \mathrm{MF}(P)$ かつ $X_n \in N_n$．
3. $C = \{X_n : \varphi(n)\}$ は，$\mathrm{MF}(P)$ の閉集合である．

ここで仮定により，$\mathrm{MF}(P)$ はある完備距離空間 $\hat{A}$ に対し，同相写像 $f : \mathrm{MF}(P) \to \mathrm{MF}(P_{\hat{A}})$ をもつ．このとき，$\{n : \varphi(n)\} = \{n : f(C) \cap f(N_n) \neq \emptyset\}$ より，Π^1_1 内包公理から，φ に関する内包公理が導ける．以上から，Σ^1_2 内包公理が示せた．したがって補集合を考えれば，Π^1_2 内包公理を得る．　■

26)　これは ATR_0 上 Π^1_1-CA_0 と同値である．

さて最後の流れ (3) は言語の拡張についてである．逆数学は本来，2 階算術の研究である．このとき，2.1 節でみたように，2 階算術の言語で書き表すためにさまざまな数学的対象はコードで表す必要があった．しかし，数学的対象によってはこのようなコードすら原理的に決められないものがある．たとえば $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数を一般的な形で定めることは 2 階算術の言語ではできない．この問題を解消し，2 階ではなく 3 階，さらには高階の算術（第 III 部参照）の枠組みで，より多くの数学的事柄に関する逆数学を調べる試みがある．このような試みの代表的なものは，ATR_0 の保存的拡大である 3 階算術体系 TBU_0 を基本体系として，主にボレル集合に関する性質の逆数学を調べようとするもの [Simpson 1997] と，コーレンバッハによる高階逆数学 [Kohlenbach 2002; 2005] がある．ここでは，後者について簡単に述べよう．

高階算術は（有限）型で区分けられた多種の変数をもつ形式体系である．型は帰納的につぎで定める．

1. 0 は型である．
2. σ, τ が型ならば，$\sigma \to \tau$ も型である．

型 0 をもつ変数は自然数をわりふる．型 $\sigma \to \tau$ をもつ変数は型 σ の値に型 τ の値をかえす関数をわりふる．型 $0, 0 \to 0, (0 \to 0) \to 0, \ldots$ はそれぞれ，$0, 1, 2, \ldots$ とも表す．

E-PRA$^\omega$ は，すべての型に対する変数をもつ形式体系で，再帰演算子 (recursor) は型 0 に関する R_0 だけをもつ．また，E-PRA$^\omega$ は，量化記号をもたない論理式に関する数学的帰納法をもち，すべての有限型に対して外延性の公理

$$\forall x^\rho \forall y^\rho \forall z^{\rho\to\tau}(x =_\rho y \to zx =_\tau zy)$$

をもつ[27]．ここで $\rho = (\rho_1 \to \rho_2 \to \cdots \to \rho_k \to 0)$ であり，$x =_\rho y$ は $\forall z_1^{\rho_1} \cdots \forall z_k^{\rho_k}\ (xz_1 \cdots z_k =_0 yz_1 \cdots z_k)$ で定義されていて，$=_0$ のみを体系に含む述語記号とする．E-PRA$^\omega$ は PRA を含むと考えられるので，有限列のコードなどは定められる．また型 σ の対象からなる集合はその特性関数と同

27) E-PRA$^\omega$ の厳密な定義は [Feferman 1977] をみよ．

一視する．したがって，その型は $(\sigma \to 0)$ である．

変数 x の型が σ であることを強調するときは x^σ と書くことにする．$f^{\sigma\to\tau}$ に x^σ を代入したものは，$f(x)$ と書いたり fx と書いたりする．つぎの（選択公理を表す）公理を QF-AC$^{\rho,\tau}$ と書く．

$$\forall x^\rho \exists y^\tau \varphi(x,y) \to \exists Y^{\rho\to\tau} \forall x^\rho \varphi(x, Yx).$$

ここで，φ は量化記号をもたない論理式とする．

E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{1,0} は RCA$_0$ の保存的拡大とみなせる．この E-PRA$^\omega$ + QF-AC^{1,0} が高階逆数学の基本体系となる．これを RCA$_0{}^\omega$ と書く．RCA$_0{}^\omega$ では RCA$_0$ よりも自然な定義が可能である．ただし，実数の定義などは 2 階算術のときと同じである．すなわち，$\forall n, m(|f(n) - f(n+m)| \leq 2^{-n})$ を満たす $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ で定める．実数の型は 1 である．$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は，任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，$x =_\mathbb{R} y \to f(x) =_\mathbb{R} f(y)$ を満たす型 $(1 \to 1)$ の関数である．また，関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続関数であることも RCA$_0$ の場合より自然な形で決めることができる[28]．

高階逆数学においては，集合存在公理ではなくつぎのような汎関数の存在との同値性を調べる．

定義 3.42 (1) つぎの公理を $(\exists^2)$ という．

$$\exists \Phi_E^2 \forall F^1 (\Phi_E(F) = 0 \leftrightarrow \exists x^0 (F(x) = 0)).$$

(2) つぎの公理を (Suslin) という．

$$\exists \Phi_S^2 \forall F^1 (\Phi_S(F) = 0 \leftrightarrow \exists G^1 \forall x^0 (G[x] \in F)).$$

RCA$_0{}^\omega$+$(\exists^2)$ は PA の保存的拡大であり，たとえば，一様化されたボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理「$\exists \Psi^{1\to 1} \forall X^1 X$ が実数の有界列ならば，$\mathbf{\Psi}(X)$ は X の集積値である」は，RCA$_0{}^\omega$ 上 $(\exists^2)$ と同値となる[29]．このように，RCA$_0{}^\omega$+$(\exists^2)$ は，ある意味で ACA$_0$ に対応するものである．

28) 連続の定義には，ε-δ によるものと $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$ によるものがあるが，どちらの場合でも同じである．

29) 高階算術では，ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理も実数列でない一般な記述にできる．この「$\exists \Psi^{2\to 1} \forall X^2 (X$ が $\mathbb{R}$ の有界部分集合ならば，$\mathbf{\Psi}(X)$ は X の集積点である$)$」は，(Suslin) と同値となる．

高階逆数学の特異な結果の一つは，つぎの主張である．

定理 3.43 つぎは $\mathrm{RCA_0}^\omega$ 上で同値になる．

(1) $(\exists^2)$.

(2) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への非連続点をもつ関数が存在する．

コーレンバッハは，弱ケーニヒの補題に対応する汎関数の存在をいうつぎの主張を導入した．

定義 3.44 つぎの公理を一様弱ケーニヒの補題 (UWKL) という．

$$\exists \mathbf{\Psi} \forall T (T \text{ が無限 0-1 木ならば}, \mathbf{\Psi}(T) \text{ は } T \text{ の道である}).$$

UWKL は $\mathrm{RCA_0}^\omega$ 上 $(\exists^2)$ と同値となる．このことから，つぎのように $\mathrm{WKL_0}$ と同値な主張を一様化したものは，$\mathrm{RCA_0}^\omega$ 上 $(\exists^2)$ となってしまう[30)]．

定理 3.45 つぎはどれも $\mathrm{RCA_0}^\omega$ 上で同値になる．

(1) $(\exists^2)$.

(2) 中間値の定理の一様化[31)]：$\exists F : C' \to [0,1] \forall f \in C'(f(F(f)) =_{\mathbb{R}} 0)$.

(3) 最大値原理の一様化：

$$\exists F : C([0,1]^d) \to [0,1]^d \forall f \in C([0,1]^d) \forall y \in [0,1]^d (f(F(f)) \geq_{\mathbb{R}} f(y)).$$

(4) ブラウワーの不動点定理の一様化：

$$\exists F : C([0,1]^e, [0,1]^e) \to [0,1]^e \forall f \in C([0,1]^e, [0,1]^e)(f(F(f))) =_{\mathbb{R}^e} F(f).$$

ここで，C' は $[0,1]$ から $\mathbb{R}$ への連続関数のうち $f(0) \leq 0 \leq f(1)$ を満たすもの全体のなす空間，$d \geq 1$ で $C([0,1]^d)$ は $[0,1]^d$ から $\mathbb{R}$ への連続関数のな

30) ただし，「連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ は上限をもつ」の一様化は $\mathrm{RCA_0}^\omega$ で $(\exists^2)$ と同値とならない [Kohlenbach 2005]．これは，連続関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ の上限を求めるとき，弱ケーニヒの補題は補題 2.17 のような一様連続性を評価する関数の存在だけに使って，あとは $\mathrm{RCA_0}$ でも証明できることに起因する．

31) 中間値の定理の証明には，エフェクティブでない場合分けがある．このため，関数列 $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ に対して，各 x_n が f_n の零点になるように実数列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ をとるような形に書き直すと $\mathrm{WKL_0}$ が必要になる．一様化においては，この事実が効いてくる．

す空間，$e \geq 2$ で $C([0,1]^e,[0,1]^e)$ は $[0,1]^e$ から $[0,1]^e$ への連続関数のなす空間をさす[32)].

第 3 章では逆数学の周辺に関する話題を四つ紹介した．ここでは紹介できなかったが，逆数学に関連するものとして，逆数学で現れた五つの体系に関する超準的側面の研究 [Keisler 2006]，構成的数学の立場から数学の定理をそれと同値となる非構成的原理によって分類するという試みである構成的逆数学 (constructive reverse mathematics) [Berger *et al.* 2006; Ishihara 2005]，再帰的数学を少し超えた数学に対する研究 (limit computable mathematics) [Hayashi and Nakata 2000]，計算可能性や計算複雑さの立場からの解析学の研究 [Ko 1991; Weihrauch 2000] など近年大きく発展している分野が多くある．

---

32)　これらの空間は可分バナッハ空間，すなわち完備可分距離空間として定められるものである．

参考文献

[Aberth 1980] Aberth, O., *Computable Analysis*, McGraw-Hill (1980).

[Avigad 1996] Avigad, J., "Formalizing forcing arguments in subsystems of second-order arithmetic", *Annals of Pure and Applied Logic*, **82** (1996), 165–191.

[Berger *et al.* 2006] Berger, J., Bridges, D. and Schuster, P., "The fan theorem and unique existence of maxima", *J. Symbolic Logic*, **71**, no. 2 (2006), 713–720.

[Bernays and Hilbert 1968–1970] Bernays, P. and Hilbert, D., *Grundlagen der Mathematik*, volume I and volume II, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 2nd ed. (1968–1970).

[Brown and Simpson 1986] Brown, D. K. and Simpson, S. G., "Which set existence axioms are needed to prove the separable Hahn-Banach?", *Annals of Pure and Applied Logic*, **31** (1986), 123–144.

[Brown and Simpson 1993] Brown, D. K. and Simpson, S. G., "The Baire category theorem in weak subsystems of second-order arithmetic", *J. Symb. Logic*, **58**, no. 2 (1993), 557–578.

[Brown *et al.* 2002] Brown, D. K., Giusto, M. and Simpson, S. G., "Vitali's theorem and WWKL", *Arch. Math. Logic*, **41**, no.2 (2002), 191–206.

[Cholak *et al.* 2001] Cholak, P., Jokush, C. and Slaman, T. A., "On the strength of Ramsey's theorem for pairs", *J. Symb. Logic*, **66**, no. 1 (2001), 1–50.

[Ershov *et al.* 1998] Ershov, Y. L., Goncharov, S. S., Nerode, A., Remmel, J. B. and Marek, V. W. (eds.), *Handbook of Recursive Mathematics*. vol. 1, 2. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics (138, 139), North-Holland, Amsterdam (1998).

[Feferman 1964, 1968] Feferman, S., "Systems of predicative analysis, I, II", *J. Symb. Logic*, **29**, **33** (1964, 1968), 1–30, 193–220.

[Feferman 1977] Feferman, S., "Theories of finite type related to mathematical practice" in Barwise, J. (ed.), *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland (1977), pp.913–971.

[Feferman 1998] Feferman, S., *In the Light of Logic*, Oxford University Press (1998).

[Fernandes and Ferreira 2002] Fernandes, A. M. and Ferreira, F., "Groundwork for weak analysis", *J. Symb. Log.*, **67**, no. 2 (2002), 557–578.

[Ferreira 1994] Ferreira, F., "A feasible theory for analysis", *J. Symb. Logic*, **59**, no. 3 (1994), 1001–1011.

[Friedman 1974] Friedman, H., "Some systems of second order arithmetic and their use", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver*, vol. 1, Canadian Mathematical Congress (1974), 235–242.

[Friedman 1976] Friedman, H., "Systems of second order arithmetic with restricted induction I, II (abstracts)", *J. Symb. Logic*, **41** (1976), 363–367.

[Friedman *et al.* 1980] Friedman, H., McAloon, K. and Simpson, S. G., "A finite combinatorial principle which is equivalent to the 1-consistency of predicative analysis", *Patras Logic Symposion (Patras, 1980)*, *Stud. Logic Foundations Math.*, **109** (1982), 197–230.

[Friedman *et al.* 1983] Friedman, H., Simpson, S. G. and Smith, R., "Countable algebra and set existense axioms", *Annals of Pure and Applied Logic*, **25** (1983), 141–181.

[Friedman and Simpson 1999] Friedman, H. and Simpson, S. G., "Issues and problems in reverse mathematics", *Computability theory and its applications (Boulder, CO, 1999)*, *Contemp. Math.* (257), 127–144, Amer. Math. Soc.

[渕野 2006] 渕野昌「ゲーデル以降の数学と数学基礎論」,『数学の楽しみ』2006 年秋号, 日本評論社.

[ジャキント 2007] ジャキント, M., 田中一之監訳『確かさを求めて：数学の基礎についての哲学論考』培風館 (2007). 原著：Giaquinto, M., *The Search for Certainty; A philosophical account of foundations of Mathematics*, Oxford Univ. Press (2002).

[Giusto and Simpson 2000] Giusto, M., and Simpson, S. G., "Located sets and reverse mathematics", *J. Symbolic Logic*, **65**, no.3 (2000), 1451–1480.

[Graham *et al.* 1990] Graham, R. L., Rothschild, B. L. and Spencer, J. H., *Ramsey Theory*, 2nd ed., Wiley (1990).

[Hájek and Pudlák 1993] Hájek, P. and Pudlák, P., *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer-Verlag (1993).

[Hatzikiriakou 1989a] Hatzikiriakou, K., "Algebraic disguises of Σ^0_1 induction", *Arch. Math. Logic*, **29** (1989), 47–51.

[Hatzikiriakou 1989b] Hatzikiriakou, K., "Comutative algebra in subsystems of second order arithmetic", Ph.D. thesis, Pennsylvania state University (1989).

[Hayashi and Nakata 2000] Hayashi, S. and Nakata, M., "Towards limit computable mathematics", in Challanghan, P. *et al.* (eds.), *Types for Proofs and Programs, International Workshop, TYPES 2000*, Lecture Notes in Computer Science **2277**, Springer (2000), 125–144.

[林・八杉 2006] 林晋・八杉満利子「第 II 部　解説」, ゲーデル, K., 林晋・八杉満利子訳『ゲーデル 不完全性定理』岩波文庫，岩波書店 (2006).

[Hirschfeldt *et al.* 2005] Hirschfeldt, D. R., Jockusch, Jr., C. G., Kjos-Hanssen, B., and Slaman, T.A., "The strength of some combinatorial principles related to Ramsey's theorem for pairs", preprint.

[Hirst 1987] Hirst, J. L., "Combinatorics in subsystems of second order arithmetic", Ph.D. thesis, The Pennsylvania State University (1987).

[Ishihara 2005] Ishihara, H., "Constructive reverse mathematics: compactness properties", *From Sets and Types to Topology and Analysis*, Oxford Logic Guides **48**, Oxford (2005) 245–267.

[Jockusch 1972] Jockusch, Jr. C. G., "Ramsey's theorem and recursion theory", *J. Symb. Logic*, **37** (1972), 268–280.

[Kanamori and McAloon 1987] Kanamori, A. and McAloon, K., "On Gödel imcompleteness and finite combinatorics", *Annals of Pure and Appl. Logic*, **33** (1987), 23–41.

[Kaye 1991] Kaye, R., *Models of Peano Arithmetic*, Oxford University Press (1991).

[Keisler 2006] Keisler, H. J., "Nonstandard arithmetic and reverse mathematics", *Bull. Symbolic Logic*, **12**, no.1 (2006), 100–125.

[Kleene 1955] Kleene, S. C., "Arithemtical predicates and function quantifiers", *Transactions of the America Mathematical Society*, **79** (1955), 312–340.

[Ko 1991] Ko, Ker-I, *Complexity Theory of Real Functions*, Progress in Theoretical Computer Science, Birkhäuser (1991).

[Kohlenbach 2002] Kohlenbach, U., "On uniform weak König's lemma", *Annals of Pure and Applied Logic*, **114** (2002), 103–116.

[Kohlenbach 2005] Kohlenbach, U., "Higher order reverse mathematics", in Simpson, S. G. (ed), *Reverse Mathematics 2001*, Lecture note in logic (21), ASL (2005), pp.281–295.

[Mummert and Simpson 2005] Mummert, C. and Simpson, S. G., "Reverse mathematics and Π^1_2 comprehension", *Bull. Symbolic Logic*, **11**, no. 4 (2005), 526–533.

[Paris and Harrington 1977] Paris, J. B. and Harrington, L., "A mathematical incompleteness in Peano arithmetic", in Barwise, J. (ed), *Handbook of Mathematical Logic*, Springer-Verlag (1977), pp.1133–1142.

[Parsons 1970] Parsons, C., "On a number-theoretic choice schema and its relation to induction", in Myhill, J., Kino, A. and Vesley, R. E.(ed.), *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland (1970), pp. 459–473.

[Quinsey 1980] Quinsey, J. E., "Applications of Kripke's Notion of Fulfilment", Ph.D. thesis, Oxford University (1980).

[Rogers 1967] Rogers, Jr. H., *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill Book Co. (1967).

[Sakamoto and Yokoyama 2007] Sakamoto, N., and Yokoyama, K., "The Jordan curve theorem and the Schönflies theorem in weak second-order arithmetic", to appear in *Arch. Math. Logic.*

[Schröder 1998] Schröder, M., "Effective metrization of regular spaces", in Ko *et al.* (ed.), *Computability and Complexity in Analysis*, Informatik-Berichte (235), Fernuniversit (1998), pp.63–80.

[Seetapun and Slaman 1995] Seetapun, D., and Slaman, T. A., "On the strength of Ramsey's theorem", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **36** (1995), 570 – 582.

[Sieg 1985] Sieg, W., Fragments of arithmetic, *Annals of Pure and Applied Logic*, **28** (1985), 33–71.

[Simpson and Smith 1986] Simpson, S. G. and Smith, R., "Factorization of polynomials and Σ^0_1 induction", *Annals of Pure and Applied Logic*, **31** (1986), 289–306.

[Simpson 1987] Simpson, S. G., "Unprovable theorems and fast-growing functions problems in reverse mathematics", *Logic and Combinatories*, AM (1987), *Contemp. Math.* (65), 359–394, Amer. Math. Soc.

[Simpson 1988] Simpson, S. G., "Partial realizations of Hilbert's program", *J. Symb. Logic*, **53** (1988), 349–363.

[Simpson 1997] Simpson, S. G., the Borel universe (a positive posting), F.O.M.-posting, Dec. 6 1997.

[Simpson 1999] Simpson, S. G., *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag (1999).

[Simpson 2000] Simpson, S. G., "A symmetric-model", 7 pages, preprint in http://www.math.psu.edu/simpson/papers/.

[Simpson *et al.* 2002] Simpson, S. G., Tanaka, K. and Yamazaki, T., "Some conservation results on weak König's lemma", *Annals of Pure and Appl. Logic*, **118**, no.1-2, (2002), 87–114.

[Simpson 2005] Simpson, S. G., "Π^0_1 sets and models of WKL_0", in Simpson, S. G. (ed.), *Reverse Mathematics 2001*, Lecture Notes in Logic (21), ASL (2005), pp.352–378.

[田中 2005] 田中尚夫『選択公理と数学　増訂版』遊星社 (2005).

[田中 1997] 田中一之『逆数学と二階算術』，河合文化教育研究所 (1997).

[Tanaka 1989] Tanaka, K., "The Galvin-Prikry theorem and set existence axioms," *Ann. Pure Appl. Logic*, **42**, no. 1 (1989), 81–104.

[Tanaka 1990] Tanaka, K., "Weak axioms of determinacy and subsystems of analysis. I. Δ^0_2 games," *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, **36**, no. 6 (1990), 481–491.

[Tanaka 1991] Tanaka, K.,"Weak axioms of determinacy and subsystems of analysis. II. Σ^0_2 games. International Symposium on Mathematical Logic and its Applications (Nagoya, 1988)," *Ann. Pure Appl. Logic*, **52**, no. 1-2 (1991), 181–193.

[Tait 1981] Tait, W. W., "Finitism", *Journal of Philosophy*, **78** (1981), 524–546.

[Weihrauch 2000] Weihrauch, K., *Computable Analysis. An Introduction*, Texts in Theoretical Computer Science, Springer (2000).

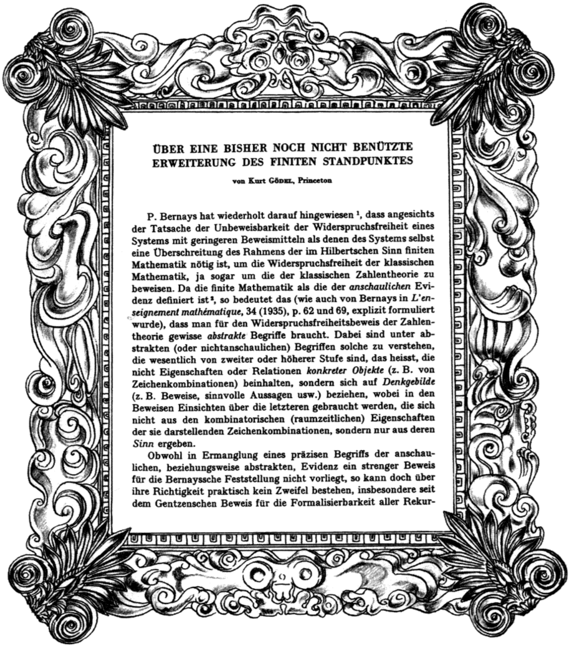
[Weyl 1960] Weyl, H., *Das Kontinuum: Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der analysis*, Viet, Leipzig (1918). Rep. in Weyl, H., Landau, E. and Riemann, B., *Das Kontinuum und andere Monographien*, Chelsea (1960, 1973).

[Yu 1994] Yu, X., "Lebesgue convergence theorems and reverse mathematics", *Math. Logic Quart.* **40**, no. 1 (1994), 1–13.

III

ダイアレクティカ解釈

白旗 優



ÜBER EINE BISHER NOCH NICHT BENÜTZTE ERWEITERUNG DES FINITEN STANDPUNKTES

von Kurt GÖDEL, Princeton

P. Bernays hat wiederholt darauf hingewiesen [1], dass angesichts der Tatsache der Unbeweisbarkeit der Widerspruchsfreiheit eines Systems mit geringeren Beweismitteln als denen des Systems selbst eine Überschreitung des Rahmens der im Hilbertschen Sinn finiten Mathematik nötig ist, um die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik, ja sogar um die der klassischen Zahlentheorie zu beweisen. Da die finite Mathematik als die der *anschaulichen* Evidenz definiert ist [2], so bedeutet das (wie auch von Bernays in *L'enseignement mathématique*, 34 (1935), p. 62 und 69, explizit formuliert wurde), dass man für den Widerspruchsfreiheitsbeweis der Zahlentheorie gewisse *abstrakte* Begriffe braucht. Dabei sind unter abstrakten (oder nichtanschaulichen) Begriffen solche zu verstehen, die wesentlich von zweiter oder höherer Stufe sind, das heisst, die nicht Eigenschaften oder Relationen *konkreter Objekte* (z. B. von Zeichenkombinationen) beinhalten, sondern sich auf *Denkgebilde* (z. B. Beweise, sinnvolle Aussagen usw.) beziehen, wobei in den Beweisen Einsichten über die letzteren gebraucht werden, die sich nicht aus den kombinatorischen (raumzeitlichen) Eigenschaften der sie darstellenden Zeichenkombinationen, sondern nur aus deren *Sinn* ergeben.

Obwohl in Ermanglung eines präzisen Begriffs der anschaulichen, beziehungsweise abstrakten, Evidenz ein strenger Beweis für die Bernayssche Feststellung nicht vorliegt, so kann doch über ihre Richtigkeit praktisch kein Zweifel bestehen, insbesondere seit dem Gentzenschen Beweis für die Formalisierbarkeit aller Rekur-



[Gödel,1958]

ゲーデルは，1 階述語論理の完全性，算術の不完全性，連続体仮説の無矛盾性を証明し，一般相対性理論の特殊解までもみつけた．さらに，最後まで手を入れ続けていたのが，いわゆるダイアレクティカ解釈による算術の無矛盾性証明である．

第 III 部では，このダイアレクティカ解釈について概説する．全体は三つの章に分けた．

第 1 章では，ダイアレクティカ解釈が登場するまでの，歴史的背景について紹介する．20 世紀前半は，数学基礎論の揺籃期であり，数学的な議論と哲学的な議論が，一体となって展開された時代だった．この時代に登場してきたさまざまな立場を歴史的に整理してから，ゲーデルがダイアレクティカ解釈によって何を達成しようとしていたのかを，明らかにしたい．

第 2 章では，ダイアレクティカ解釈の，数学的な内容について解説する．予備知識がなくても大筋がわかるように，できるだけ直観的な説明を心がけた．そのぶん，証明の細部を適当に省いてしまっているが，1 階述語論理と λ 計算を一通り学んだことがある読者であれば，容易に細部を埋められると思う．ただし，数学的帰納法に関する箇所は，細部までていねいに述べた．少し面倒なため，標準的なテキストでも細かい計算は省いている場合があるからである．

第 3 章では，ゲーデル以後のダイアレクティカ解釈研究について，簡単な見取り図を与えている．具体的には，ダイアレクティカ解釈で使われる λ 計算の体系 T のモデル論，ダイアレクティカ解釈のペアノ算術の部分体系，限定算術，2 階算術への応用，ダイアレクティカ解釈の圏論的研究について紹介している．

近年では，コンピュータ科学との関連で，計算を構造化するための枠組みとしての「証明」に，関心がもたれている．しかし，その際に本当に必要となるのは，証明のもつ抽象的な構造である．そして，ダイアレクティカ解釈は，そうした抽象化の有力な事例と目されている．不完全性定理に比べると，紹介される機会の少ないダイアレクティカ解釈であるが，この第 III 部が，ゲーデルの残したこの重要なアイデアの理解に資すれば幸いである．

第1章
ダイアレクティカ解釈の背景

ゲーデルの第二不完全性定理によれば，1 階の述語論理で公理化された自然数論であるペアノ算術の無矛盾性を，ペアノ算術の内部で証明することはできない．しかし，この結果は，ペアノ算術の無矛盾性を，ペアノ算術よりも明証性が高いと思われる理論で証明することはできない，と述べているわけでは必ずしもない．

実際，ゲンツェンは，ある超限的な順序数にまで拡張された数学的帰納法を，論理的複雑さの程度が限定された論理式に対してのみ使って，より明証性の高いと思われる原理によるペアノ算術の無矛盾性証明を与えた．ゲーデルもまた，ペアノ算術の無矛盾性を証明するための，別の枠組みを与えている．それが，ダイアレクティカ解釈である．

この章では，ダイアレクティカ解釈の背景となった数学基礎論での状況を簡単にスケッチする．まず，集合論的パラドクスへの反応として生じたいくつかの立場を紹介し（1.1 節），その中でもとくにヒルベルトのプログラムについて概観する（1.2 節）．そして，ゲンツェンによる無矛盾性証明のエッセンスを解説し（1.3 節），こうした背景の中にダイアレクティカ解釈を位置づける（1.4 節）．

1.1　集合論的パラドクスによって生じたいくつかの立場

集合論的パラドクスとは，カントルの集合論では，さしあたり何の誤りもみつからない推論によって，矛盾が証明できてしまうという事態のことである．これは，まずツェルメロ，続いて独立にラッセルによって発見され，通常は「ラッセルのパラドクス」として知られている．このパラドクスは，フレーゲの体系でも，同じように生じる．

ワイエルシュトラスによる ε-δ 論法や，デデキントによる有理数からの実数の構成などによって，19 世紀の数学はより精密で正確なものとなっていった．しかし，集合論的パラドクスの発見によって，数学の確実性に対するナイーブな確信は，大きく揺さぶられることになった．パラドクスに導いた推論がごく自然なものだったために，集合論だけではなく，解析学や，さらには自然数論も，矛盾を内に含んでいるかもしれないと思われたからである．

この事態に対する反応として，数学の基礎に関するいくつかの立場が生じた．それらは，歴史的意味をもつだけではなく，今日でも発展している研究プログラムの起源となっている．

公理的集合論　ツェルメロは，カントルの集合論から，パラドクスが生じないと思われる範囲で，実質的な理論の展開に必要な原理を取り出し，それを集合論の公理とした [Zermelo 1908][1]．これは，今日，最も基礎的な数学的理論として広く受け入れられている，ツェルメロ・フレンケル集合論の原型である．公理化された体系としての集合論は，公理的集合論と総称されている．

公理的集合論は，解析学や代数学の基礎として使われているだけではなく，それ自身が数学的研究の対象として，活発に研究されてきた．とくに，連続体仮説や選択公理といった命題が，ツェルメロ・フレンケル集合論の公理から独立であるということの証明は，数理論理学の研究に対してフィールズ賞が贈られた（1966 年）唯一つの事例となっている．

1)　ツェルメロの公理系から，選択公理を除き，正則性公理と置換公理を付け加えたものが，ツェルメロ・フレンケル集合論である．

ただし，ツェルメロ・フレンケル集合論の公理は，なんらかの哲学的な根拠にではなく，どちらかといえば実用性に基づいて選ばれている．そして，その無矛盾性に対する信頼は，基本的には経験的なものにとどまる．また，解析学や代数学を展開するためには，実際にはツェルメロ・フレンケル集合論のごく一部だけで十分である．

可述主義　ポアンカレとワイルは，数学的対象の定義で生じる「悪循環」に問題があるとした [Poincaré 1906; Weyl 1921][2]．ある集合が，その集合自身も属すると考えられる全体に言及して定義されるとき，そこには悪循環があるとされる．つまり，言及されている全体は，定義されている当の集合が定まってはじめて意味をもつと考えられるからである．こうした「悪循環」を含まない「可述的定義」のみを認める数学は，可述的数学と呼ばれる．

しかし，「可述的ではない定義」は，とくに問題視されることなく，数学の重要な一部として使われてきた．たとえば，実数を「デデキント切断」という形で，ある条件を満たす有理数の集合として定義したときに，なんらかの上界をもつ実数の集合 S の上限 $\sup S$ は，S に属するなんらかの実数に属する有理数の集合，つまり $\exists X\,(X \in S \wedge r \in X)$ を満たす r の集合として定義される．ここでの存在量化は，実数全体の集合の上への量化となっているので，$\sup S$ は，それ自身も属するはずの実数全体の集合に言及して定義されている．つまり，実数論で使われている $\sup S$ の定義は，悪循環を含んでいる[3]．しかし，この定義を認めない数学は，あまりにも制限されたものになってしまう．

型理論　ラッセルもまた，いくつかの試行錯誤の後に，悪循環をパラドクスの原因と考えるようになった．ラッセルは，個体，個体を引数とする述語，そ

2)　ポアンカレは，もともとのアイデアを，リシャールに帰している．またポアンカレは，悪循環を含む議論の例として，カントルによる $\aleph_1$ の存在証明（ただし [Poincaré 1996] では削除）と，ホワイトヘッドによる自然数全体の集合の定義（最小の帰納的集合）をあげている．

3)　この例は [Weyl 1921] にある．マンコスによる解説も参照 [Mancosu 1998, pp. 66–77]．

うした述語を引数とする述語，等々，という区分を導入したうえで，悪循環を含まない「可述的な述語」と，可述的な述語の全体に言及して定まる述語とを区別する．たとえば，x を個体を表す変数，Y を個体を引数とする可述的な述語を表す変数として，命題 $F(Y,x)$ を考えてみよう．このとき，$\forall Y F(Y,x)$ という述語は，個体を引数とする述語となるが，可述的ではない，つまり，この述語自身は，$\forall Y$ が限量している範囲には属さないとされる．ラッセルのこうした理論は，分岐型理論と呼ばれている[4]．

しかし，分岐型理論によって数学が過度に制限されないようにするため，ラッセルはまた，「還元可能性公理」も導入した．これは，任意の述語 F に対して，F を満たす対象の範囲と G を満たす対象の範囲が同一となるような，可述的な述語 G が存在するという公理である[5]．

分岐型理論は，あまりすっきりとしたものではないため，広く受け入れられることはなかった．しかし，可述性に基づいた「可述的数学」の体系は，継続した研究の対象となってきたし，分岐型理論から可述性に関する部分を除いた単純型理論は，チャーチらによって型付き λ 計算の理論へと発展させられ，今日ではプログラム言語研究での基礎理論の一つとなっている．また，ゲーデルのダイアレクティカ解釈は，型付き λ 計算に基づいたものである．

直観主義　ブラウワーは，とくに無限の領域に関する命題 P に対して，排中律 $P \vee \neg P$ を拒絶した．ブラウワーによれば，存在命題 $\exists x F(x)$ が正しいと主張できるのは，具体的な対象 a について，$F(a)$ が正しいことがすでにわかっている場合に限られる．同様に，選言 $Q \vee R$ が正しいと主張できるのは，Q が正しいことがすでにわかっている場合か，R が正しいことがすでにわかっている場合に限られる．また，否定命題 $\neg Q$ が正しいと主張できるのは，Q が正しいという仮定から，矛盾が導ける場合に限られる．無限の領域に関する存在命題については，それを正当化する a の候補は無限にあるし，矛盾の導出もまた無限に試みることができる．そして，そうした対象および導出の

4)　[Russell 1908] および [Russell 1978, pp. 37–65] などを参照．

5)　還元可能性公理は，制限なしの内包原理（任意の述語に対するクラスの存在）を弱めたものである，とラッセルは指摘している [Russell 1978, p. 58]．こう考えると，還元可能性公理は，たしかにそれほど不自然ではない．

いずれもが，「まだ」みつかっていないという例はいくらでもある．すると，その証拠も反証もまだ得られていない命題 P については，$P \vee \neg P$ を正しいと主張できないことになる[6)]．

ブラウワーの立場は，直観主義とか構成主義と呼ばれている．こうした立場に基づいた数学は，ブラウワー以後，ハイティングらによって発展させられ，数学の一つの分野を形成している．また，直観主義的な数学は，計算可能性理論と密接に関連しており，そのため今日ではコンピュータ科学で活発に研究されている．

形式主義　そしてヒルベルトである．ヒルベルトは，解析学や自然数論で普通に使われている原理を制限することには反対であった．その代わりに，既存の数学を「記号」を使って「形式的」に公理化し，そうして得られた「形式体系」の無矛盾性を，直観的に明証な「有限的」方法のみを使って，数学的に証明することを提唱した．これが，ヒルベルトのプログラムである[7)]．形式体系を対象とする数学は，メタ数学あるいは証明論と呼ばれる．

ヒルベルトのプログラムは，アッケルマン，フォン・ノイマン，そしてとくにベルナイス，といった協力者を得て，着実に進んでいったが，ゲーデルの第二不完全性定理によって，当初の意図通りには達成できないことがわかった．しかし，それ以後のゲンツェンによるペアノ算術の無矛盾性証明や，ゲーデルのダイアレクティカ解釈は，ヒルベルトのプログラムの拡張として，やはりその延長線上にある．

6)　ブラウワーの全体像を把握するのは難しい．しかし，たとえば [Brouwer 1929] が比較的よくまとまっている．ブラウワーの思想は，数学の基礎だけには留まらず，「生」についての思弁的な考察にまで及んでいる．[Mancosu 1998] 所収のファン・シュティクトによるブラウワーについての解説を参照．

7)　ヒルベルトのプログラムが最初に提示されたのは，1904 年の第 3 回国際数学者会議での講演においてである（[van Haijenoort 1967] 所収）．より熟した形では，[Hilbert 1925] にまとめられている．

1.2 ヒルベルトのプログラム

数学の多くの分野に大きな足跡を残したヒルベルトは，数学基礎論の産みの親の一人でもある．ヒルベルトは，公理的方法による古典的な著作『幾何学基礎論』を 1899 年に出版しているが，集合論的パラドクスに直面してからは，解析学，さらには自然数論でさえも「形式的」に公理化し，その無矛盾性を，数学的な方法によって証明しようとした．ただし，無矛盾性証明に使う数学それ自身は，直観的に明証なものでなければいけない．ヒルベルトは，「有限的」な数学が，その役目を果たせると考えた．

ヒルベルトのプログラムを理解するためには，まず「形式的」ということの意味を明確にしなければいけない．数学的な命題は，言葉によって表現されるが，言葉とは意味をもった記号である．しかし，記号を，意味をもたない音声や文字の，単なる連なりとして理解することもできる．そうした連なり自身は，それだけではまだ意味をもっていない．このようにして理解された記号が，「形式的」な記号である．

たとえば，「おはよう」という記号は，意味をもった記号としては，挨拶を表す．しかし，「お」とか「は」といった文字は，意味をもってはいない．「おはよう」を，そうした意味をもたない文字が，単に並んでできただけのものと思えば，「おはよう」を形式的な記号としてみていることになる．プログラミングでいう「文字列」は，まさに形式的な記号のことである．

ある数学の分野を，形式的に公理化するということは，その分野を形式的な記号の体系に移し替えるということである．より正確には，まず基本的な形式的記号である語彙を指定し，そこから項，論理式，文といった形式的な記号を定義する．ある種の文は公理とされる[8)]．また，文と文との関係として，推論規則が定義される．さらに，公理から出発して，推論規則をくり返し適用することで形成される文の連なりが，証明である．証明の最後に現れる文は，定理と呼ばれる．

---

8) 文とは，自由変数を含まない論理式のことである．暗黙の全称量化を想定して，論理式を公理とする場合も多い．推論規則と定理についても同様である．

このようにして得られた形式体系を対象として論じる数学が，メタ数学である．メタ数学での対象は，形式的な記号と，有限個の形式的記号の組み合わせである．これらは，十分な明証性をもって，直観的に具体的に与えられている．ヒルベルトによれば，このような形式的な記号に関する直観が，メタ数学に確固たる基礎を提供するのである．

ヒルベルトは，1925 年の論文「無限について」の中で，集合論的パラドクスのような事態が生じたのは，無限の要素をもつ抽象的な概念を，まったく無制約に受け入れてしまったためであり，論理的推論を正しく行うために，従わなければいけないある一定の条件があるとしている．そして，つぎのように述べている．

> そのような条件が存在し，遵守されなければいけないのを認める点で，私たちは哲学者たち，とくにカントと，同じ意見である．カントはすでに——これは彼の教説の根幹なのだが——つぎのように教えていた．つまり，数学が手にしている内容は，すべての論理から独立して確保されており，論理だけによって，それに基礎を与えることはできない．この理由で，フレーゲとデデキントの努力は失敗したのである [Hilbert 1925, p. 376][9]．

それでは，論理から独立に確保された数学の内容は，どのようにして与えられるのだろうか．

> 論理的推論の使用と論理的演算の遂行のための条件として，あらかじめ何かが私たちの表象能力に与えられていなければならない．それは，論理には属さない，なんらかの具体的対象であり，すべての思考に先行した直接的な経験として，直観的に現前しなければいけない．論理的推論が信頼のおけるものであるためには，そうした対象を，あらゆる部分にわたって，見渡すことが可能でなければならない．そして，そうした対象が現れているという事実

9) 論理から独立した数学的直観の必要性を主張するという点では，実はヒルベルトはポアンカレと同じ立場をとっている．そして，ポアンカレもまた，論理主義者に反対する議論の中で，論理主義をライプニッツ的，自分の立場をカント的，と特徴付けている．

や，互いに異なっているという事実，継起している，あるいは並んでいる，という事実は，他の何にも還元可能ではないし，還元される必要もないものとして，対象とともに，直観的かつ具体的に与えられるべきである [Hilbert 1925, p. 376][10].

そのような具体的対象は，メタ数学では，まさしく形式的な記号として与えられている．

数学ではとくに，私たちが考察するのは，私たちが採用した把握のしかたに従って，その形が直観的に明晰で認知可能な，具体的な記号それ自身である [Hilbert 1925, p. 376][11].

ただし，上の引用で，ヒルベルトは，カントを援用しているのだが，ヒルベルトの哲学的立場は，それほど明確なものではなく，歴史的な事実関係についても，数学の哲学としても，掘り下げて考える余地が多い[12].

形式的記号とその有限の組み合わせを対象とするメタ数学を，ヒルベルトは「有限な」数学としてとらえている．しかし，そうした対象が全体として有限個しか存在しないというわけではない．それでは，無限の領域に関する命題は，どのようなときに「有限」と呼べるのか．

ヒルベルトは，「無限について」の中で，当時知られていた最大の素数

$$p = 170141183460469231731687303715884105727$$

についての

$$p+1 \text{ と } p!+1 \text{ の間に素数が存在する}$$

10) カント哲学的にいえば，数学的真理は，感性の形式である時間と空間のもつ一般的な構造に由来する．

11) 近年ではパーソンズが，こうした立場から数学的直観について論じている [Parsons 1983].

12) [Mancosu 1998] でのマンコスによるヒルベルトとベルナイスについての解説を参照．ヒルベルトとベルナイスは，新フリース学派の創始者であるネルソンと親しかった．フリースは，カント学派の一人で，ヘーゲルの同時代人であり，『法哲学』緒言では批判の対象にされている．また，ネルソンの提唱した教育におけるソクラテス的方法は，ヘックマンによって継承され，「ソクラテス的方法による対話 (Socratic Dialogue)」の運動につながっている．

という存在命題は

$$p+1 \text{ または } p+2 \text{ または } p+3 \text{ または } \cdots \text{ または } p!+1 \text{ は素数である}$$

という有限個の選言肢からなる命題の省略形とみなせるので，有限の範囲に属するが，上記の命題によって含意される

p よりも厳密に大きい素数が存在する

という存在命題は

$$p+1 \text{ または } p+2 \text{ または } p+3 \text{ または } \cdots \text{ 無限に続く，は素数である}$$

という意味なので，もはや有限の範囲に属するとはいえない，としている．

また，有限の範囲を超えるもう一つの例として，ヒルベルトは全称命題の否定をあげている．たとえば，

a が数記号であるときには，$a+1=1+a$ がいつでも成り立つ

という全称命題は，有限主義の観点からは「否定されることができない」[13]．

> これは，以下の事実について反省してみれば明らかになる．つまり，この命題は，数記号を含む無限個の等式を「かつ」で結びつけたものとしてではなく，数記号が与えられたときにはじめて何かを言明するようになる仮定的判断としてのみ解釈できる，という事実である [Hilbert 1925, p. 378][14]．

以上の例だけでは，それほどはっきりとしないが，さしあたり「有限な」命題とは，変数を含んでもよいが量化記号は含まない算術の論理式で表現できる命題ということになるだろう[15]．

---

13)　以上の例は [Hilbert 1925, pp. 377–378] にある．

14)　ヒルベルトは続けて，特定されていない数記号が現れる等式は，すべての数記号によって満たされるか，ある反例によって反駁されるかのいずれかである，と考えることは，等式の妥当性の主張が否定できるということを前提としているため，受け入れられないとしている．

15)　こうした論理式の妥当性は，それを全称化して得られる文の妥当性と同じである．

しかし，さらに問題となるのは，数学的帰納法の位置づけである．ポアンカレは，すでに1905/6年の時点で，ヒルベルトの要求する無矛盾性証明のためには，数学的帰納法が必要であることを指摘し，それをもって数学が論理学に還元できないことの根拠としていた [Poincaré 1996, III 章 III 節および VIII 節][16]．同様の批判は，ベッカーによってもなされている．ヒルベルトとベルナイスは，メタ数学では帰納法がたしかに必要だが，それは「完全に具体的に与えられた」対象に関わる限定されたもので，一般的な帰納法とは区別されるとしていた．しかし，この区別が正確に何なのか，明瞭にされていたとはいえない [Mancosu 1998, pp. 165–167].

1.3 ゲンツェンの無矛盾性証明

ゲーデルの第二不完全性定理によって，ペアノ算術の無矛盾性を，ペアノ算術と同等かそれ以下の強さの体系で証明することはできない．「有限な」方法はペアノ算術の一部分のはずなので，ペアノ算術の無矛盾性を証明するには，「有限な」方法を超えなければいけない．実際，ゲンツェンは，「有限な」方法を超えると思われる，順序数 ϵ_0 までの超限帰納法を使って，ペアノ算術の無矛盾性を証明した．

ゲンツェンによる自然数論の無矛盾性は，1936年に出版された論文「自然数論の無矛盾性」で与えられている．まず，ゲンツェンは，「疑わしい」推論と，「疑わしくない」推論を区別する [Gentzen 1936, pp. 520–533]．「疑わしくない」推論とは，基本的には，命題の「有限な」解釈によって正当化可能なものである．述語と関数の決定可能性を前提にしたうえで，論理結合子の「有限な」解釈による正当化可能性が，とくに問題とされる．そして，ゲンツェンによる論理結合子の「有限な」解釈は，ヒルベルトのそれではなく，ブラウワーの直観主義的な解釈とほぼ一致している [Gentzen 1936, p. 531][17]．

16)　該当箇所は，1905年と1906年に2回に分けて発表された論文をもとにしている．

17)　ゲンツェンは，「A ならば B」の解釈について，直観主義者よりも厳格な立場をとっている．A の証明が与えられたときに B の証明が構成できる，という証明自体が「ならば」

自然数論の無矛盾性を自然数論の内部では証明できない，したがって論点先取とならない無矛盾性証明などありえないのではないか，という疑念に対するゲンツェンの立場は，以下の通りである．

> とはいえ，部分的にはもはや自然数論に属さないが，それにもかかわらず，自然数論の疑わしい構成要素よりも**確実**であるとみなし得る手段によって，自然数論の無矛盾性を証明することができる，ということは，まったくもって考えられる [Gentzen 1936, p. 500. 強調は原文のまま].

ゲンツェンの無矛盾性証明では，証明されるものの単位として，個々の論理式ではなく，論理式 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ と論理式 Q から構成される

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \to Q$$

という形をした，シーケントと呼ばれる表現を考える．これは，意図としては，「$P_1, P_2, \ldots, P_n$ から，Q が帰結する」を形式化している．

ゲンツェンは，自然数論をこうしたシーケントの体系として形式化したうえで，その形式体系で証明可能な任意のシーケントは，「有限な」解釈のもとで正しい，したがってその形式体系は無矛盾である，ということを，シーケントの還元というアイデアによって示した．

シーケントの還元は，「有限な」解釈のもとでの正しさと正しくなさを保存するシーケントからシーケントへの変形である．そのため，あるシーケントが，述語と関数の決定可能性だけから正しいとわかるシーケントに，有限のステップで還元されるとすれば，それはもとのシーケントの「有限な」解釈のもとでの正しさを確証していることになる．

> 以下で説明される，シーケントの「**還元規則の挙示可能性**」という概念は，意味をもった数学での**正しさの概念**に対する，形式的な代理物として役立つ．この概念は，言明の**即自的理解**の代わりとして，言明のある**特定の有限的解釈**を与える [Gentzen 1936, p. 536. 強調は原文のまま].

を含んでいる場合に対して，ゲンツェンは懐疑的である．

シーケントの還元では，シーケントを論理記号に沿って分解し，より簡単なシーケントに次々と変形していく．たとえば，上述のシーケントの右辺に置かれている論理式 Q が $\forall x A(x)$ の場合には，任意の数記号 n を x に代入した

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \to A(n)$$

というシーケントに変形する．一方で，左辺に置かれている P_i が $\forall x\, B(x)$ という形の場合には，なんらかの適切な数記号 n を x に代入して

$$P_1, \ldots, B(n), \ldots, P_n \to Q$$

というシーケントにする．基本的に右辺の論理式が左辺のそれに優先して分解される [Gentzen 1936, pp. 536–541][18)]．

しかし，任意の証明可能なシーケントが，「有限な」解釈のもとで正しいことを示すためには，シーケントの還元だけではなく，形式的証明の還元も考える必要がでてくる．そして，実際には，前者は後者に包摂されることになる．

結局，無矛盾性証明にとって本質的なのは，任意の形式的証明が「つねに有限のステップで」それ以上還元できない形式的証明に至る，というメタ数学的な主張である．ゲンツェンはこれを，還元の「有限性」と呼んでいる．この主張は，証明を要する．順序数 ϵ_0 までの超限帰納法が使われるのは，まさにこの「有限性証明」においてである．

証明のアイデアは単純である．任意の形式的証明に関する還元の「有限性」を示すために，帰納法を使おう．まず，すべての形式的証明に，順序付けられた「数」を割り当てる．還元を 1 回適用すると，形式的証明に割り当てられている「数」が必ず減少することを示せば，「有限性証明」にとって十分である．なぜなら，もとの形式的証明を p，それに割り当てられている「数」を

18) ゲンツェンは，連言，否定，全称量化を基本的な論理的演算として証明を進めている．連言，否定に沿った還元も含めたうえで，シーケントの還元は，今日的な用語では，ヘンキン・ヒンティカ・ゲームのシーケント版として理解できる．その際には，「シーケントの還元規則」は，シーケントの正しさを示す必勝戦略となる．これは証明探索の手続きと対応しており，ゲーデルのダイアレクティカ解釈とも深く関係していると思われる．[Tait 2005] を参照．

α とし，p に還元を 1 回適用して得られる形式的証明を q，それに割り当てられている「数」を β とすれば，$\beta < \alpha$ なので，帰納法の仮定により q に関しては「有限性」が成り立つ．したがって，p についてもそうである．そこから，任意の形式的証明に関して，「有限性」が成り立つと結論できる．

しかし，ここでの「数」は自然数の範囲には収まらない．これは，自然数論の形式体系に属する数学的帰納法のためである．数学的帰納法を扱うためには，$\forall x A(x)$ を証明している形式的証明に割り当てられる「数」は，x に自然数 n を代入する還元で得られる $A(n)$ の形式的証明に割り当てられる「数」よりも大きくなければいけない．そして，任意の n について，そうでなければいけない．$A(n)$ の形式的証明に自然数が割り当てられているとしても，それは n に応じて限りなく大きくなり得るので，もとの $\forall x A(x)$ の形式的証明に割り当てられる数は，あらゆる自然数よりも大きい「数」でなければいけないことになる．

こうした「数」としては，カントルの定義した順序数がふさわしい．任意の自然数よりも大きい「数」を考えるのは，それほど不自然なことではない．たとえば，1 に収束する狭義の単調増加有理数列 $r_0 < r_1 < r_2 < \cdots$ を考えてみよう．この有理数列と自然数の間には，順序を保存した一対一対応がある．つまり，この有理数列を，自然数の「コピー」とみなすことができる．すると，1 に対応する「数」を，任意の自然数よりも大きい「数」として，新たに導入してもかまわないのではないか．カントルは，そうした「数」を ω と名付けた．

ひとたび ω を認めてしまえば，$\omega + 1, \omega + 2, \ldots$ も自然に考えられる．そして，今度は任意の $\omega + n$ よりも大きい「数」として，$\omega + \omega$ が考えられる．これは，自然数での場合と同様に，$\omega \cdot 2$ とも表記される．すると，さらに $\omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \ldots$ という系列の上限として，$\omega \cdot \omega$ あるいは ω^2 が考えられ，同様に $\omega, \omega^2, \ldots$ の上限として ω^ω も考えられる．つまり，それまでに与えられた「数」の無限列 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ に対して，その上限をあらたに「数」として認めることで，「数」の概念を次々と拡張していけるわけである．

このように拡張された「数」は，カントルの定義した順序数の一部をなす．集合論での順序数は，もう少し一般的に定義されるので，上記のやり方で得

られる順序数は「構成的」な順序数とでも呼ぶのがふさわしい．無矛盾性証明での帰納法に必要なのは，そうした「構成的」な順序数である．

とくに，無矛盾性証明では，形式的証明に割り当てられる順序数全体が，順序数に拡張された指数関数 $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ に関して閉じていることが要求される．一般に，順序数は，それよりも厳密に小さい順序数すべての集合となっているので，$\alpha \mapsto \omega^\alpha$ に関して閉じた順序数があれば，その要素となる順序数だけで，形式的証明への割り当てには十分であることになる．そして，$\alpha \mapsto \omega^\alpha$ に関して閉じた最小の順序数は，この関数を前の項に次々と適用して得られる

$$\omega, \omega^\omega, \omega^{(\omega^\omega)}, \omega^{\left(\omega^{(\omega^\omega)}\right)}, \ldots$$

の上限として定められ，ϵ_0 と呼ばれる．

ϵ_0 までの超限帰納法とは，ϵ_0 よりも厳密に小さいすべての順序数について妥当する命題を証明するための原理である．それは，ϵ_0 に属する任意の順序数 α に関して，α よりも厳密に小さいすべての順序数 β について $P(\beta)$ が成り立つという仮定から，$P(\alpha)$ が成り立つことを示せれば，ϵ_0 に属する任意の順序数 γ に関して，端的に $P(\gamma)$ が成り立つとする．ゲンツェンの無矛盾性証明での $P(\alpha)$ は，「順序数 α を割り当てられた形式的証明は，還元の有限性を満たす」という主張である．

ゲンツェンは，「構成的」な順序数に依拠した超限帰納法は，それが還元の「有限性証明」という限定された文脈で使われる限りでは，直観的に十分に明らかであると考える．そして，無矛盾性証明での他の部分は「有限な」解釈で保証される範囲内なので，無矛盾性証明は，自然数論を，実際に以前よりも確実性の高いものとしている．

> 全体として，**有限性証明**もまた，疑わしい証明手段と，疑わしくない証明手段という根本的な区別という点では，いぜんとして**疑わしくない**側に数え入れることができる，と私は考える．そのため，この無矛盾性証明は，自然数論の疑わしい部分を，実際に確証するものとなっているのである [Gentzen 1936, p. 560．強調は原文のまま]．

ゲンツェンのこうした見解は，より洗練された形で，現代の証明論研究にも反映されている．ゲンツェンの無矛盾性証明では，たとえ ϵ_0 までの超限的な帰納法を使っているにしても，そうした帰納法が適用される命題はきわめて低い複雑さのものに限定されており，さらに証明は直観主義論理の範囲内で遂行可能である．そのため，無矛盾性証明を遂行するのに必要な原理だけを形式化した体系を T とすると，T の無矛盾性は十分に明瞭である．さらに，超限帰納法を限定することで，その無矛盾性と自然数論の無矛盾性が同等であるような，T の部分体系 T_0 を得ることができる．この結果は，自然数論の無矛盾性が，十分に明瞭な T_0 の無矛盾性に還元されたとして理解できる[19)]．

1.4　ダイアレクティカ解釈の位置づけ

ゲーデルのダイアレクティカ解釈は，1958 年に出版された論文「有限的立場の従来未使用であった一つの拡張について」の中で述べられている．これは，『ダイアレクティカ』という雑誌に，ベルナイス 70 歳記念として掲載された．「ダイアレクティカ」という呼び名は，この雑誌の名前に由来するものであって，論文の内容には，とりあえず何の関係もない．

この論文は，現在『ゲーデル全集』に収められている形では，ドイツ語原文で 6 ページ弱であり，さらに技術的な部分は，後半の 3 ページ程度でしかない [Gödel 1958]．使用されている体系の定義，算術の解釈，無矛盾性の証明，はすべて簡単にスケッチされているだけである．

しかし，そこで述べられた内容は，それ以後，何人もの論理学者によって，細部が埋められ，正確にされ，発展させられてきた．ゲーデル自身も，1965 年から 1972 年に至るまで，この論文の英語版を改訂し続けた．ゲーデルは，結局それを出版しようとはしなかったが，1972 年での原稿が，やはり『ゲーデル全集』に収められている [Gödel 1972]．内容的には，1958 年のものとほとんど同じだが，文章表現が整理され，新たな註が付け加えられている．

19)　ポーラーズの教科書を参照 [Pohlers 1989, pp. 5–6, 75–76]．こうした方向の研究は，還元的証明論と呼ばれている．



ÜBER EINE BISHER NOCH NICHT BENÜTZTE ERWEITERUNG DES FINITEN STANDPUNKTES

von Kurt GÖDEL, Princeton

P. Bernays hat wiederholt darauf hingewiesen [1], dass angesichts der Tatsache der Unbeweisbarkeit der Widerspruchsfreiheit eines Systems mit geringeren Beweismitteln als denen des Systems selbst eine Überschreitung des Rahmens der im Hilbertschen Sinn finiten Mathematik nötig ist, um die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik, ja sogar um die der klassischen Zahlentheorie zu beweisen. Da die finite Mathematik als die der *anschaulichen* Evidenz definiert ist [2], so bedeutet das (wie auch von Bernays in *L'enseignement mathématique*, 34 (1935), p. 62 und 69, explizit formuliert wurde), dass man für den Widerspruchsfreiheitsbeweis der Zahlentheorie gewisse *abstrakte* Begriffe braucht. Dabei sind unter abstrakten (oder nichtanschaulichen) Begriffen solche zu verstehen, die wesentlich von zweiter oder höherer Stufe sind, das heisst, die nicht Eigenschaften oder Relationen *konkreter Objekte* (z. B. von Zeichenkombinationen) beinhalten, sondern sich auf *Denkgebilde* (z. B. Beweise, sinnvolle Aussagen usw.) beziehen, wobei in den Beweisen Einsichten über die letzteren gebraucht werden, die sich nicht aus den kombinatorischen (raumzeitlichen) Eigenschaften der sie darstellenden Zeichenkombinationen, sondern nur aus deren *Sinn* ergeben.

Obwohl in Ermanglung eines präzisen Begriffs der anschaulichen, beziehungsweise abstrakten, Evidenz ein strenger Beweis für die Bernayssche Feststellung nicht vorliegt, so kann doch über ihre Richtigkeit praktisch kein Zweifel bestehen, insbesondere seit dem Gentzenschen Beweis für die Formalisierbarkeit aller Rekur-

[1] Vgl. z. B.: *Entretiens de Zurich* (herausg. von F. GONSETH, 1941), p. 144, 147; ferner: HILBERT-BERNAYS, *Grundlagen der Mathematik*, Bd. 2 (1939), § 5; und: *Rev. Internat. Phil.* Nr. 27-28 (1954), Fasc. 1-2, p. 2.
[2] Vgl. die Hilbertsche Formulierung in *Math. Ann.* 95 (1925), p. 171-173.

図 1.1　「ダイアレクティカ」論文 [Gödel 1958]

ここではゲーデルがダイアレクティカ解釈を，メタ数学の中でどのように位置づけていたのかについて，簡単に述べておきたい．

ゲーデルは，ベルナイスにしたがって，自然数論の無矛盾性証明には，なんらかの「抽象的」概念が必要だと考える．そして，「抽象的概念」とは，ゲーデルがつぎのように特徴付ける，2 階もしくは高階の概念にほかならない．

> 抽象的概念とは，この文脈では，本質的に 2 階もしくは高階の階層に属する概念のことである．つまり，**具体的対象**（たとえば記号の結合体）の性質や関係ではなく，**思考構造**もしくは**思考内容**（たとえば証明，有意味な命題，など）を内容としてもつ概念である．そうした心的対象についての命題の証明で必要な洞察は，それらを表す記号の組み合わせ的（時空的）性質の考察からではなく，関与している**意味**の考察から得られる [Gödel 1958, p. 240. 強論は原文のまま].

ゲーデルによれば，ゲンツェンが ϵ_0 までの超限帰納法を正当化しようとした

ときにも，それまでに得られたすべての順序数をまとめて見渡す，という形で，やはりこうした抽象的概念が介在していた．

ゲーデルは，さらにベルナイスにしたがって，有限主義数学が課す要求を，構成主義的なものと，狭い意味で有限主義的なものに二分する．構成主義的な要求によれば，数学的対象の存在，もしくは数学的事実の存立が認められるのは，それが直接提示されるか，構成もしくは証明によって得られる限りでなければいけない．有限主義的な要求によれば，さらに，それらの対象もしくは事実は，具体的な数学的直観において与えられなければいけない．

有限主義数学を超えるにあたって，捨てるべきなのは，2 番目の狭い意味での有限主義的な要求である．この条件を満たした，従来とは異なる無矛盾性証明の方法として，ダイアレクティカ解釈は意図されている．

> 捨てるべきなのは，2 番目の要求である．今日まで，直観主義論理の一部と，順序数の構成的理論の一部を，有限主義数学に付け加えることで，この事情に配慮が払われてきた．以下では，その代わりに，**自然数上の有限型の計算可能関数**という概念と，そうした関数に関するきわめて初歩的な公理と構成原理を使って，自然数論の無矛盾性が証明できることを示す [Gödel 1958, p. 244. 強調は原文のまま].

以下の章の内容を，簡単に先取りして述べておくと，ゲーデルはペアノ算術での論理式を，まず直観主義的論理に翻訳し，それをさらに高次の型をもつ関数を使った $\exists u \forall x\, \phi(u,x)$ という形の論理式で解釈する．ただし，ここで $\phi(u,x)$ は量化記号を含まない論理式である．そして，もとの論理式がペアノ算術で証明可能であれば，ある具体的な項 t が存在して，T と呼ばれる量化記号なしの体系の中で，$\phi(t,x)$ が証明可能となることを示す．

ここでの u と x は，選言を直観主義的に解釈するために必要なもの以外は，すべてもとの論理式での束縛変数と対応しており，その束縛変数に代入される自然数を計算する形で現れている．最も基本的な例は，直観主義での論理式が，$\forall x \exists u\, \phi(u,x)$ の形をしている場合である．ただし，$\phi(u,x)$ は量化記号なしの論理式とする．これは

$$\exists f \forall x\, \phi(f(x), x)$$

という論理式で解釈される．もとの論理式 $\forall x \exists u\, \phi(u,x)$ が正しいことを示すために u に代入されるべき自然数は，x に代入される自然数に依存する．その解釈 $\exists f \forall x\, \phi(f(x), x)$ での f は，x に代入される自然数を受け取って，u に代入されるべき自然数を返す関数である．

こうした関数 f は，一般に，選択関数とかスコーレム関数と呼ばれている．そして，上の例で登場した解釈で生じた変形は，スコーレム化と呼ばれる．ゲーデルのダイアレクティカ解釈は，スコーレム化を論理式すべてに拡張したものであるといってもよい．

その際に，とくに重要なのは，量化記号が含意の内側で登場している場合である．くわしくは後述するが，その特殊な場合とみなせる否定命題で，例をあげておこう．上と同じ $\forall x \exists u\, \phi(u,x)$ に否定記号を付けた論理式 $\neg\forall x \exists u\, \phi(u,x)$ の解釈は，$\neg\exists f \forall x\, \phi(f(x), x)$ での否定を内側に押し込んで

$$\forall f \exists x\, \neg\phi(f(x), x)$$

としてから，ふたたびスコーレム化によって

$$\exists g \forall f\, \neg\phi(f(g(f)), g(f))$$

として得られる論理式である．f は自然数から自然数への関数であったので，g はそうした関数を受け取って，自然数を返す関数となる．こうした関数が，高次の型をもつ関数である．

このようにすると，解釈の結果として得られた $\exists u \forall x\, \phi(u,x)$ での u と x は，一般には高次の型をもつ変数となる．そのため，u に代入される項 t も，高次の型をもつ関数を表したものとなる．結局，ペアノ算術の無矛盾性は，量化記号は含まないが高次の型をもつ項を含む体系 T の無矛盾性に還元される．そして，ゲーデルは，体系 T の無矛盾性をさらに証明する必要があるとは思っていなかったようである．

「抽象的概念」を使った「構成主義的要求」を満たす無矛盾性証明という考えに戻ると，ゲーデルは体系 T を，ϵ_0 までの超限帰納法に相当するような，「抽象的概念」に関する自明で正しい理論とみなしていたのだろう．

しかし，今日では，体系Tの無矛盾性を，モデルの構成を通じて「証明」するという態度が一般的であるように思える．そうしたモデルには，再帰的関数の継承的な階層として構成されたモデルと，Tの項それ自身を同値関係で割って得られるモデルがある．後者のいわゆる「項モデル」で使われる同値関係では，還元した結果が同じになる項が同値とみなされる．しかし，そのためにはやはり，項の還元が有限のステップで止まることを示さなければいけない．そして，そこでは ϵ_0 までの超限帰納法が登場する．

そのため，自然数の形式体系で証明可能な論理式に，Tで証明可能な量化記号なしの論理式 $\phi(t,x)$ を対応付ける作業は，もとの形式的証明での，とくに量化記号に関わる推論の構造を，高次の型をもつ項 t に集約する作業として理解するのが適切だと思う．

第2章
ダイアレクティカ解釈の概要

ゲーデルのダイアレクティカ解釈は，ペアノ算術の無矛盾性を証明する手段として意図されている．それは，ペアノ算術での論理式を，直観主義的なハイティング算術での論理式に翻訳したうえで，さらにその結果を，高次の型をもつ変数への量化を許した $\exists u \forall x\, \phi(u,x)$ という形の論理式で解釈する．そして，もとの論理式がペアノ算術で証明可能であれば，ある高次の型をもつ項 t が存在して，量化記号を含まない T と呼ばれる体系で，$\phi(t,x)$ が証明可能であることを示す．これにより，ペアノ算術の無矛盾性は，体系 T の無矛盾性に還元される．

この章では，以上のようにまとめられるダイアレクティカ解釈の概要を，具体的に解説していきたい．まず，自然数論の形式体系であるペアノ算術を提示し，その無矛盾性がハイティング算術の無矛盾性に還元できることを示す（2.1 節）．次に型付き λ 計算の等式理論として体系 T を導入し（2.2 節），ダイアレクティカ解釈の本体といえる，ハイティング算術の論理式 ϕ の，高次の型をもつ変数への量化を許した論理式 ϕ^D による解釈を与える（2.3 節）．最後に，そうした解釈によって，ハイティング算術の無矛盾性が，どのようにして体系 T の無矛盾性に還元されるのかを示す（2.4 節）．

2.1 ペアノ算術からハイティング算術への還元

これからペアノ算術，ハイティング算術，体系 T という三つの形式体系を定義し，そこでの証明可能性について論じていく[1)]．これら三つの形式体系を，それぞれ PA, HA, T と表し，それらの体系の中で論理式 ϕ が証明できることを，PA $\vdash \phi$ などと表すことにしよう．

この 2.1 節では，ペアノ算術での論理式 ϕ のハイティング算術への翻訳 ϕ^N を定義し

$$\mathrm{PA} \vdash \phi \quad \text{ならば} \quad \mathrm{HA} \vdash \phi^N$$

が成り立つことを示す．そして，2.3 節では，ハイティング算術での論理式 ϕ の，体系 T の論理式 $\phi_D(u,x)$ を使った $\exists u \forall x \phi_D(u,x)$ という論理式への翻訳を定義し

$$\mathrm{HA} \vdash \phi \quad \text{ならば} \quad \text{ある項}\, t \,\text{について}\, \mathrm{T} \vdash \phi_D(t,x)$$

が成り立つことを示す．この二つの翻訳を組み合わせることで，ペアノ算術が矛盾していれば，体系 T も矛盾していることが導ける．

ペアノ算術とは，自然数に関するペアノの公理に基づいた，古典的な 1 階述語論理での自然数論の形式体系である．そうした形式体系を定義するには，まず語彙を指定し，そうした語彙を使って形成される論理式のうちのいくつかを，公理として指定すればよい．

語彙は基本的な記号の集合であり，1 階述語論理のテクニカルタームでは，言語と呼ばれる．言語に属する記号は，定数記号，関数記号，述語記号に分類される．さらに，関数記号と述語記号には，それぞれ項数と呼ばれる自然数が割り当てられていなければいけない．項数 n の関数記号と述語記号は，それぞれ n 項関数記号と n 項述語記号と呼ばれる．このような言語を指定することで，1 階述語論理は，それぞれの用途に応じて，いわばカスタマイズされることになる．

---

1) 以下での解説は，基本的に [Avigad and Feferman 1998] に従っている．ただし，細部を省略している箇所もあるし，逆に補っている箇所もある．

1階述語論理では，指定された言語に加えて，連言記号 $\wedge$，選言記号 $\vee$，含意記号 $\supset$，否定記号 $\neg$，全称限量子記号 $\forall$，存在限量子記号 $\exists$，および，左括弧 (と右括弧) が使用できる．また，可算無限個の変数も使用できることになっている．さらに，2項述語記号である等号 $=$ を，言及なしに言語に含めてしまうのが一般的であり，ここでもそうする．言語とこうした記号から，所定の構文論的規則に従って形成された論理式は，やはりその言語に属する論理式と呼ばれる．

ペアノ算術の言語は，定数記号 0 と 1 項関数記号 S，および 2 項関数記号 $+$ と $\cdot$ からなる．項は再帰的につぎのように定義される．

1. 任意の変数は，項である．
2. 定数記号 0 は，項である．
3. t が項であれば，$(\mathrm{S}(t))$ は項である．
4. t と s が項であれば，$(t+s)$ および $(t \cdot s)$ は項である．
5. 上記の 1–3 で与えられるもの以外は，項ではない．

論理式は，同様な再帰的定義によって，つぎのように定義される．

1. s と t が項であれば，$(s=t)$ は論理式である．
2. ϕ が論理式であれば，$(\neg\phi)$ は論理式である．
3. ϕ と ψ が論理式であれば，$(\phi \wedge \psi)$，$(\phi \vee \psi)$，$(\phi \supset \psi)$[2] は論理式である．
4. ϕ が論理式であり x が変数であれば，$(\forall x\, \phi)$，$(\exists x\, \phi)$ は論理式である．
5. 上記の 1–4 で与えられるもの以外は，論理式ではない．

括弧は，混乱が生じなければ，適当に省略してよいし，異なった種類の括弧を使ってもよい．条項 1 によって与えられる論理式は，とくに原子論理式と呼ばれる．原子論理式 $s=t$ の否定 $\neg(s=t)$ は，$s \neq t$ と書いてもよい．また，条項 4 での全称量化記号 $\forall$ と存在量化記号 $\exists$ は，ϕ までの段階では，束縛されてない変数 x の現れを，新たに束縛するとされる．束縛された変数は，束縛変数と呼ばれ，そうでない変数は，自由変数と呼ばれる．自由変数を含

2) 第 III 部以外では「$\phi \to \psi$」と書いているが，ここでは「$\to$」は別の目的に使う．

まない論理式は，とくに文と呼ばれる．

ペアノ算術での個体定項 0 は，意図としては自然数 0 を表す．また，関数記号 S は，自然数上の関数 $n \mapsto n+1$ を表す．要するに，「つぎの数」という意味である．この関数は，後者 (successor) 関数と呼ばれる．0 以外の自然数を表す記号 $1, 2, \ldots$ は，$\mathrm{S}(0), \mathrm{S}(\mathrm{S}(0)), \ldots$ の省略表現として扱う．関数記号 $+$ と $\cdot$ は，それぞれ自然数の加法と乗法を意図している．

ペアノ算術の推論体系は，1 階述語論理の公理と推論規則に加えて，後者関数が，自然数から 0 以外の自然数への一対一写像（単射）であることを述べる二つの公理と，$+$ と $\cdot$ の原始再帰的定義である四つの公理，およびそれぞれの論理式 $\phi(x)$ に対する数学的帰納法からなっている．後者関数に関する公理は，以下の二つの等式である．

$$0 \neq \mathrm{S}(x),$$
$$\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y) \supset x = y.$$

また，加法と乗法に関する公理は，つぎの 2 組の等式である．

$$\begin{cases} x + 0 = x, \\ x + \mathrm{S}(y) = \mathrm{S}(x+y), \end{cases} \qquad \begin{cases} x \cdot 0 = 0, \\ x \cdot \mathrm{S}(y) = (x \cdot y) + x. \end{cases}$$

数学的帰納法は，推論規則として与えられ，$\phi(0)$ と $\phi(x) \supset \phi(\mathrm{S}(x))$ がすでに証明されているときに，任意の項 t について $\phi(t)$ を導くことを許す．

$$\frac{\phi(0) \quad \phi(x) \supset \phi(\mathrm{S}(x))}{\phi(t)}.$$

ただし，推論規則を表す上記の表現は，メタ数学的な表現 $\phi(x)$ を含んだそれ自身やはりメタ数学的な表現であり，図式 (schema) と呼ばれる．実際の推論規則は，この $\phi(x)$ に，ペアノ算術での任意の論理式を代入して得られる．そのため，数学的帰納法は，図式としては一つだが，それが表す実際の推論規則は，論理式と同じく可算無限個ある．

また，目的に応じて，$\mathrm{S}, +, \cdot$ だけではなく，すべての原始再帰的関数を表す関数記号と，それらの再帰的定義を加えることもある．後者関数と加法，乗

法があれば，すべての原始再帰的関数を，論理式の形で定義することができるので，いずれのやり方でも，本質的な違いはない．

ペアノ算術は，排中律を含む古典的な 1 階述語論理での算術である．しかし，その無矛盾性は，直観主義的論理での算術であるハイティング算術の無矛盾性に還元することができる．ハイティング算術は，直観主義述語論理の公理に，上述の後者関数，加法，乗法に関する六つの公理と，数学的帰納法の規則を加えることで得られる．直観主義述語論理の公理系は，2.4 節で与える．

ペアノ算術の無矛盾性の，ハイティング算術の無矛盾性への還元は，ゲーデルとゲンツェンがそれぞれ独立に発見した，古典論理の直観主義論理への翻訳による．それは，古典論理での論理式 ϕ に対して，その翻訳となる直観主義論理での論理式 ϕ^N を，記号としての同一性を $\equiv$ で表すことにして，以下のように再帰的に定義する．

1. ϕ が原子論理式であれば，$\phi^N \equiv \neg\neg\phi$.
2. $(\phi \wedge \psi)^N \equiv \phi^N \wedge \psi^N$.
3. $(\phi \vee \psi)^N \equiv \neg\left(\neg\phi^N \wedge \neg\psi^N\right)$.
4. $(\phi \supset \psi)^N \equiv \phi^N \supset \psi^N$.
5. $(\forall x\, \phi)^N \equiv \forall x\, \phi^N$.
6. $(\exists x\, \phi)^N \equiv \neg\forall x\, \neg\phi^N$.

ただし，古典論理での否定論理式 $\neg\phi$ は，明らかに偽である論理式 $\bot$ を使って，$\phi \supset \bot$ とあらかじめ書き直しておく．論理式 $\bot$ は，命題定数として導入してもよいが，たとえば $0 = 1$ などでもよい．

上記の翻訳は，二重否定翻訳あるいは否定的翻訳と呼ばれる．実際，任意の ϕ^N は，その二重否定 $\neg\neg\phi^N$ と，直観主義的に論理的同値となる．また，一般的に，以下の定理が成り立つ．

定理 2.1　古典論理上で，公理の集合 S から論理式 ϕ が証明できるとすれば，直観主義論理上で，S に属する論理式の翻訳の集合 S^N から，論理式 ϕ^N が証明できる．

さらに，この定理から，ペアノ算術の矛盾性をハイティング算術の無矛盾性に還元することを許す，つぎの系が導ける．

系 2.2 算術の言語に属する任意の論理式 ϕ について，ペアノ算術で ϕ が証明できれば，ハイティング算術で ϕ^N が証明できる．

証明 ペアノ算術での証明の構成に関する帰納法による．原子論理式については，ハイティング算術でも排中律が成り立つことを証明できるので，その二重否定翻訳は，もとの論理式と論理的に同値である．これを使って，後者関数，$+$，$\cdot$ に関する六つの公理は，二重否定翻訳後も，もとの公理と論理的に同値であることが示せる．また，数学的帰納法によって，$\phi(0)$ と $\phi(x) \supset \phi(\mathrm{S}(x))$ から $\phi(x)$ が導かれている場合には，帰納法の仮定により $\phi^N(0)$ と $(\phi(x) \supset \phi(\mathrm{S}(x)))^N$ が証明できることになるが，後者は $\phi^N(x) \supset \phi^N(\mathrm{S}(x))$ なので，ハイティング算術でも，やはり数学的帰納法により $\phi^N(x)$ が導ける． ■

この系から，ペアノ算術で $0 = 1$ が証明できれば，ハイティング算術での $0 = 1$ が証明できることになる．つまり，ハイティング算術が無矛盾であれば，ペアノ算術も無矛盾である．

2.2 型付き λ 計算の等式理論としての体系 T

体系 T は，それぞれの型に対する再帰演算子を加えた，単純型付き λ 計算の体系として定義される[3]．単純型付き λ 計算は，ラッセルの型理論を簡単にした単純型理論に基づく，関数計算の形式体系であり，再帰演算子は，関数の再帰的定義を可能にする．

自然数論で登場する関数は，たとえば後者関数 $n \mapsto n+1$ のように，自然数に対して自然数を対応付ける関数である．しかし，そうした自然数から自然数への関数 f に対して，なんらかの自然数 n を対応付ける関数 $f \mapsto n$ や，

3) 型付き λ 計算については，標準的な教科書である [Hindley and Seldin 1986] を参照するとよい．ダイアレクティカ解釈についても述べられている

自然数から自然数へのなんらかの関数 g を対応付ける関数 $f \mapsto g$ を考えることもできる[4].

こうした仕組みを形式化したものが，型付き λ 計算である．そこでは，関数を表す記号表現である「項」と，関数の定義域と値域を表す記号表現である「型」が，組み合わせて使用される．

体系 T で使われる型は，自然数を表す型 0 から出発して，以下のように再帰的に定義される．

1. 0 は型である．
2. σ と τ が型であれば，$(\sigma \to \tau)$ は型である．

ただし，一番外側の括弧は省いてもよい．また，約束として，括弧を付けなくても，右から括弧を補って読むことにする．つまり，$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma_3$ と書いてあったら，それを $\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_3)$ と読む．

型付き λ 計算での項は，定まった型に属する定数記号と，それぞれの型ごとに無限個ある変数から，「適用」と「抽象」という操作によって，構成される．

たとえば，関数 $n \mapsto n+1$ は，与えられた自然数 a に対して，それに 1 を加えた数を返す．このとき，関数 $n \mapsto n+1$ は自然数 a に適用された，という．一般に，X から Y への関数 f を，X の要素 a に適用すると，結果として Y の要素が得られる．この f を a に適用した結果を，通常 $f(a)$ と表す．λ 計算でも，型 $\sigma \to \tau$ に属する項 t を，型 σ に属する項 s に適用した結果を，型 τ に属する ts という項で表す．

ところで，これまで関数 $n \mapsto n+1$ という書き方をしてきたが，そこでは $n+1$ という表現が使われている．n が未知ではあるがなんらかの自然数を表すとすれば，$n+1$ もやはり未知ではあるが n に依存して定まる自然数を表す．関数 $n \mapsto n+1$ は，$n+1$ の n に対する依存関係によって定まる関数である．未知の自然数を表す表現 $n+1$ から，関数 $n \mapsto n+1$ を抽出する操作を，抽象と呼ぶ．

4) 関数の集合を定義域とする関数は，汎関数 (functionals) と呼ばれることもある．

一般に，x が X に属する未知の要素を表す変数で，x を含んだ表現 $f(x)$ が Y に属する要素を表すとき，抽象によって，$f(x)$ の x への依存関係によって定まる X から Y への関数 $x \mapsto f(x)$ が得られる．λ 計算では，型 τ に属する項 t について，型 σ に属する変数 x^σ への t の依存関係によって定まる関数を，型 $\sigma \to \tau$ に属する $\lambda x^\sigma\, t$ という項で表す．

項 $\lambda x^\sigma\, t$ の中での変数 x^σ の現れは，1 階述語論理での量化記号の場合と同じようにして，λ 記号によって束縛される．束縛されていない変数を，自由変数と呼ぶのも同じである．

項 t から，そこでの変数 x^σ の自由な現れすべてに，同じ型 σ の項 s を代入して得られる項を，$t[s/x]$ と表記する．ただし，s での自由変数が，$t[s/x]$ では束縛されてしまわないように，t での束縛変数を適当に書き換えてから，s の代入を行う約束にする．

項 $\lambda x^\sigma\, t$ での束縛変数 x^σ を，別の変数 y^σ に書き換えて，$\lambda y^\sigma\, t[y^\sigma/x^\sigma]$ という形にしても，表す関数は変わらない．これは項の α 同値性と呼ばれる．α 同値性は，あらかじめ前提としてしまってもよい．つまり，束縛変数の書き換えだけによって相互に移行できる α 同値な項は，はじめから同一とみなしてもかまわない．

項 t の変数 x^σ への依存関係は，t での x^σ の自由な現れとして表現されているので，項 $\lambda x^\sigma\, t$ を項 s に適用した結果は，$t[s/x]$ と同じでなければいけない．これは，項の β 同値性と呼ばれる．

1 階述語論理での言語の指定と同じように，λ 計算も基本的な型と定数記号を指定することでカスタマイズされる．体系 T では，型 0 に属する定数記号 0，型 $0 \to 0$ に属する定数記号 S，そして，それぞれの型 σ に対して与えられる，型 $\sigma \to (0 \to \sigma \to \sigma) \to 0 \to \sigma$ に属する，再帰演算子と呼ばれる定数記号 R_σ を使う[5]．整理すると，体系 T での項は，以下のように再帰的に定義される．

1. 型 σ に属する変数は，型 σ に属する項である．

5) 0 という記号を，型を表す記号と，定数記号の両方として使っているが，文脈から両者は区別できるはずである．

2. 0 は，型 0 に属する項である．
3. S は，型 $0 \to 0$ に属する項である．
4. R_σ は，型 $\sigma \to (0 \to \sigma \to \sigma) \to 0 \to \sigma$ に属する項である．
5. t が型 $\sigma \to \tau$ に属する項であり，s が型 σ に属する項であれば，(ts) は型 τ に属する項である．
6. t が型 τ に属する項であれば，型 σ に属する変数 x^σ について，$(\lambda x^\sigma\, t)$ は型 $\sigma \to \tau$ に属する項である．

ただし，α 同値な項は，同一とみなす．以前と同様に，項の一番外側の括弧は省いてもよい．また，型での括弧に関する約束と対応させて，適用によって得られている項については，左から自動的に括弧を補うことにする．つまり，$t_1 t_2 t_3$ は，$(t_1 t_2)\, t_3$ と読む．

再帰演算子 R_σ については，説明が必要だろう．たとえば，与えられた自然数 m に対して，関数 $n \mapsto m + n$ を，後者関数 S を使って，つぎのように定義することができる．

$$\begin{cases} m + 0 = m, \\ m + \mathrm{S}(n) = \mathrm{S}(m + n). \end{cases}$$

計算可能性理論では，一般的に，つぎのような原始再帰的定義によって，すでに定義されている関数 g と h から，パラメータ y を含む関数 $x \mapsto f(y, x)$ を定義する．

$$\begin{cases} f(y, 0) = g(y), \\ f(y, \mathrm{S}(x)) = h(y, x, f(y, x)). \end{cases}$$

これを高次の型をもつ関数を使って，λ 計算の表記法を少し濫用しながら，書き換えてみよう．まず，関数 $x \mapsto f(y, x)$ を $\lambda x\, f(y, x)$ と書いてしまう．これは，パラメータ y に関しても抽象したうえで，高次の型をもつ関数 $\lambda y \lambda x\, f(y, x)$ として読み直すことができる．それをあらためて f で表すことにしよう．h についても同様の操作を行うと，上の定義はつぎのように書き直せる．

$$\begin{cases} f y\, 0 = g y, \\ f y(\mathrm{S}(x)) = h y x (f y x). \end{cases}$$

しかし，高次の型をもつ関数の間の等式を使えば，y に言及することなく，こうした f を得ることができる．つまり，$G \equiv g$ および $H \equiv \lambda x \lambda z \lambda y\, hyx(zy)$ として，つぎのように F を定義すれば，f は $f \equiv \lambda y \lambda x\, Fxy$ として得られる．

$$\begin{cases} F\,0 = G, \\ F(\mathrm{S}(x)) = Hx(Fx). \end{cases}$$

一般的に，上の定義での G の型が σ であるとしよう．そのとき，F の型は $0 \to \sigma$ となり，H の型は $0 \to \sigma \to \sigma$ となる．再帰演算子 R_σ は，そうした型の任意の G と H に対して，上の定義を満たす F を返す高次の型をもつ関数を表すためにある．つまり，F は

$$\mathrm{R}_\sigma GH$$

と表される．

体系 T は，以上のように定義された項の間の同等性を，古典的な命題論理のうえで述べる理論である[6)]．同等性は，述語記号 $=$ を使った等式 $s = t$ の形で表現されるので，こうした理論は等式理論と呼ばれる．

体系 T での論理式は，同じ型をもつ項 s と t からなる原子論理式 $s = t$ から，命題結合子の適用によって形成される．体系 T の推論体系は，古典的な命題論理の公理と推論規則，変数に対して同じ型に属する任意の項を代入することを許す推論規則，等号に関する公理，項の β 同値性を述べる公理，定数記号 $0, \mathrm{S}, \mathrm{R}_\sigma$ に関する公理，および数学的帰納法からなる．

変数に対する項の代入を許す推論規則は，ϕ がすでに証明されているときに，任意の変数 x^σ と，型 σ に属する任意の項 t について，$\phi[t/x^\sigma]$ を導くことを許す．

$$\frac{\phi}{\phi[t/x^\sigma]}.$$

等号に関する公理は，つぎの二つである．

6) 直観主義論理に限定してもよいが，$s = t$ について排中律が成り立つので，結果的には同じになる．

$$x^\sigma = x^\sigma,$$
$$x^\sigma = y^\sigma \supset (\phi[x^\sigma/z^\sigma] \supset \phi[y^\sigma/z^\sigma]).$$

ただし，後者での ϕ は原子論理式に限ってよい．項の β 同値性は，つぎの公理によって表される．

$$(\lambda x^\sigma\, t)\, y^\sigma = t[y^\sigma/x^\sigma].$$

以下，変数の型は自明なので，型を表す上添字を省略する．定数記号 0 と S に関する公理は，ペアノ算術でのものと同じである．

$$0 \neq \mathrm{S}(x),$$
$$\mathrm{S}(x) = \mathrm{S}(y) \supset x = y.$$

再帰演算子に関する公理は，意図されている再帰的定義にそくして，つぎのように与えられる．

$$\mathrm{R}_\sigma xy\,0 = x,$$
$$\mathrm{R}_\sigma xy(\mathrm{S}(z)) = yz\,(\mathrm{R}_\sigma xyz).$$

数学的帰納法は，ペアノ算術でのものと同じで，論理式 $\phi[0/x]$ と $\phi[\mathrm{S}(x)/x]$ がいずれも証明されているときに，型 0 に属する任意の項 t について $\phi[t/x]$ を導くことを許す．

$$\frac{\phi[0/x] \quad \phi \supset \phi[\mathrm{S}(x)/x]}{\phi[t/x]}$$

以上で，体系 T の説明は終了した．

2.3 ハイティング算術のダイアレクティカ解釈

ゲーデルのダイアレクティカ解釈では，ハイティング算術での論理式 ϕ に対して，体系 T での論理式 ϕ_D を使った限量論理式

$$\exists u_1^{\sigma_1} \exists u_2^{\sigma_2} \ldots \exists u_m^{\sigma_m} \forall x_1^{\tau_1} \forall x_2^{\tau_2} \ldots \forall x_n^{\tau_n}\, \phi_D$$

を対応付ける．ただし，ここでの m と n は，それぞれに 0 であってもよい．その場合には，当該の量化記号は，まったく現れないことになる．また，量化記号と結びついている変数はすべて互いに異なるとする．この量化論理式を，ϕ のダイアレクティカ解釈と呼び，ϕ^D で表そう．

以下では，煩雑さを避けるため，一つの文字で，項の有限列を表す約束にする．たとえば，文字 u によって，変数の有限列 $u_1^{\sigma_1}, u_2^{\sigma_2}, \ldots, u_m^{\sigma_m}$ を表す．このとき，$\exists u$ は，$\exists u_1^{\sigma_1} \exists u_2^{\sigma_2} \ldots \exists u_m^{\sigma_m}$ を表すことにし，全称量化記号についても同様とする．

一つの変数だけからなる有限列は，その変数それ自身と同一視する．さらに，項の有限列 $t \equiv t_1, t_2, \ldots, t_m$ と $s \equiv s_1, s_2, \ldots, s_n$ が与えられているとき，個々の t_i をすべての s_j に順次適用した結果からなる有限列

$$t_1 s_1 s_2 \ldots s_n, \quad t_2 s_1 s_2 \ldots s_n, \quad \ldots, \quad t_m s_1 s_2 \ldots s_n$$

を，単純に ts と表すことにする．この場合，型の適合を前提としている．同様に，$\lambda u\, s$ によって

$$\lambda u_1^{\sigma_1} \lambda u_2^{\sigma_2} \ldots \lambda u_m^{\sigma_m}\, s_1, \quad \ldots, \quad \lambda u_1^{\sigma_1} \lambda u_2^{\sigma_2} \ldots \lambda u_m^{\sigma_m}\, s_n$$

を表す．さらに同じ長さの有限列 t と t' について

$$t_1 = t'_1 \wedge t_2 = t'_2 \wedge \cdots \wedge t_n = t'_n$$

を表す $t = t'$ という表現も，自由に使うことにする．

量化論理式 ϕ^D の中にある体系 T の論理式 ϕ_D は，u と x に属する変数を，自由変数として含んでいるかもしれないし，そうでないかもしれない．いずれにせよ，u と x を明示したいときには，ϕ_D を $\phi_D(u, x)$ と書き，ϕ_D に自由に現れる限りの u や x に項の有限列を代入した結果を，$\phi_D(s, x)$ とか $\phi_D(s, t)$ などと書く約束にしておく．該当する自由変数を ϕ_D が含まない場合には，代入は何の変化もおこさない．また，$\phi_D(u, x)$ は，u と x 以外の自由変数を含んでいてもよい．そうした自由変数 z に言及する必要があるときには，さらに $\phi_D(u, x, z)$ と書く．

論理式 ϕ のダイアレクティカ解釈 $\phi^D \equiv \exists u \forall x\, \phi_D(u,x)$ は，以下のようにして再帰的に定義される．再帰的な条項で現れる論理式 ϕ および ψ については，束縛変数の適当な変更によって，すべて互いに異なる変数の列 u,x,v,y によって

$$\phi^D \equiv \exists u \forall x\, \phi_D(u,x), \quad \psi^D \equiv \exists v \forall y\, \psi_D(v,y)$$

となるようにしておく．さらに，u,x は ψ^D で自由に現れてはいけないし，v,y は ϕ^D で自由に現れてはいけないとする．また，関数記号 $+$ と $\cdot$ は，加法と乗法を定義する体系 T の項で置き換えておく．

1. ϕ が原子論理式であれば，ϕ^D および ϕ_D は ϕ それ自身である．
2. $(\phi \wedge \psi)^D \equiv \exists uv \forall xy\, (\phi_D \wedge \psi_D)$.
3. $(\phi \vee \psi)^D \equiv \exists zuv \forall xy\, ((z=0 \wedge \phi_D) \vee (z=1 \wedge \psi_D))$.
4. $(\phi \supset \psi)^D \equiv \exists xv \forall uy\, (\phi_D(u,xuy) \supset \psi_D(vu,y))$.
5. $(\forall z\, \phi)^D \equiv \exists u \forall zx\, \phi_D(uz,x,z)$.
6. $(\exists z\, \phi)^D \equiv \exists zu \forall x\, \phi_D(u,x,z)$.

ここで，変数の型は，それ以前の段階で定まっている変数の型に適合するようにする．ハイティング算術の論理式での変数は，体系 T での型 0 の変数とみなす．条項 4 の $(\phi \supset \psi)^D$ での変数 x と v の型は，xuy と vu が ϕ^D と ψ^D での x と v の型とそれぞれ一致するように，より高次の型とされる．同様に，条項 5 の $(\forall z\, \phi)^D$ での u の型は，uz の型が ϕ^D での u の型と一致するようにとり直す．

条項 3 での z は，ϕ^D と ψ^D で未使用の変数でなければいけない．$(\phi \vee \psi)^D$ は，直観主義的な選言の解釈に沿ったものである．つまり，$\phi \vee \psi$ が正しく主張できるのは，あらかじめ選んだ ϕ と ψ のいずれか一つが，正しく主張できる場合に限られる．新たに導入された変数 z は，この選択を 0 と 1 で表している．

条項 5 の $(\forall z\, \phi)^D$ は，$\phi^D \equiv \exists u \forall x\, \phi_D(u,x,z)$ のスコーレム化による．つまり，ϕ^D で存在量化されている u の，自由変数 z に対する依存性を，あらためて u をスコーレム関数として表している．

条項 4 の $(\phi \supset \psi)^D$ は，つぎのような変形の連鎖の結果から，スコーレム

化によって得られる．

$$\begin{aligned}\exists u \forall x\, \phi_D(u,x) \supset \exists v \forall y\, \psi_D(v,y) &\leftrightarrow \forall u\, [\, \forall x\, \phi_D(u,x) \supset \exists v \forall y\, \psi_D(v,y)\,] \\ &\overset{*}{\leftrightarrow} \forall u \exists v\, [\, \forall x\, \phi_D(u,x) \supset \forall y\, \psi_D(v,y)\,] \\ &\leftrightarrow \forall u \exists v \forall y\, [\, \forall x\, \phi_D(u,x) \supset \psi_D(v,y)\,] \\ &\overset{**}{\leftrightarrow} \forall u \exists v \forall y \exists x\, [\, \phi_D(u,x) \supset \psi_D(v,y)\,].\end{aligned}$$

最初と 3 番目の変形は，直観主義的述語論理で成り立つ同値関係である．

2 番目の星印 $(*)$ をつけた変形では，一般に，x が自由に現れない θ について，$\theta \supset \exists x\, \eta$ が $\exists x\, (\theta \supset \eta)$ と論理的に同値であるとする，前件の独立と呼ばれる原理が使われている．これは，古典論理では成り立つが，直観主義論理に基づいた構成主義的数学では通常は認められていない．論理式 $\theta \supset \exists x\, \eta$ を正しいと主張するために必要な x は，θ の正当化を仮定してみつければよいが，$\exists x\, (\theta \supset \eta)$ を正しいと主張するために必要な x は，そうした仮定なしにみつけなければいけないからである．

4 番目の星印二つ $(**)$ をつけた変形では，量化記号を含まない θ と，量化記号も自由な x も含まない η について，$\forall x\, \theta \supset \eta$ と $\exists x\, (\theta \supset \eta)$ が論理的に同値であるとされている．後者から前者は直観主義的述語論理で導ける．前者から後者の導出は，量化記号をもたない論理式 θ に関する論理的原理

$$\neg \forall x\, \theta \supset \exists x\, \neg \theta$$

によって正当化できる．これは，ロシア派の構成主義的数学で認められているマルコフ原理の一般化とみなせる．拡張マルコフ原理と呼んでおこう．

$\forall x\, \theta \supset \eta$ から $\exists x\, (\theta \supset \eta)$ の導出の正当化は，体系 T ではそうであるように，量化記号をもたない論理式については，排中律が成り立つと仮定したうえで，つぎのように行える．

論理式 η は量化記号をもたないので，正しいか正しくないかのいずれかである．正しい場合には，論理式 $\exists x\, (\theta \supset \eta)$ も正しい．正しくない場合には，$\forall x\, \theta \supset \eta$ がすでに証明されているので，$\neg \forall x\, \theta$ が成り立つ．すると，拡張マルコフ原理により，$\exists x\, \neg \theta$ である．さらに，$\neg \theta$ からは $\theta \supset \eta$ が導けるので，$\exists x\, (\theta \supset \eta)$ が正しいことがわかる．

拡張マルコフ原理は，$\forall x\,\theta$ からの矛盾の導出を使って，x に代入されて $\neg\theta$ を正当化する対象を構成できると述べている．その構成方法は，一般には自明でないが，量化の範囲が自然数の場合には，条件を満たすなんらかの自然数の存在が保証されていれば，単純な探索によって，その条件を満たす具体的な自然数を発見できるはずである．

また，量化の範囲を自然数に限定した場合の拡張マルコフ原理は，算術の論理式 θ に関するマルコフ原理 $\forall x\,(\theta \vee \neg\theta) \supset (\neg\neg\exists x\,\theta \supset \exists x\,\theta)$ を，とくに量化記号なしの論理式 θ に適用して得られる

$$\neg\neg\exists x\,\theta \supset \exists x\,\theta$$

と直観主義論理で同値になる．

前者から後者は，つぎのようにして導ける．仮定 $\neg\neg\exists x\,\theta$ から $\neg\forall x\,\neg\theta$ が導け，そこから拡張マルコフ原理により，$\exists x\,\neg\neg\theta$ が導ける．量化記号をもたない論理式については二重否定の除去が成り立つので，さらに $\exists x\,\theta$ となる．反対方向の導出は，つぎのようになる．仮定 $\neg\forall x\theta$ から $\neg\forall x\,\neg\neg\theta$ であり，そこから $\neg\neg\exists x\,\neg\theta$ となる．したがって，マルコフ原理により，$\exists x\,\neg\theta$ である．

2.4 ハイティング算術の無矛盾性

ハイティング算術の無矛盾性は，以下の定理によって，体系 T の無矛盾性に還元される．

定理 2.3 論理式 ϕ が，ハイティング算術で証明可能とする．このとき，$\phi^D \equiv \exists u\forall x\,\phi_D(u,x)$ となる $\phi_D(u,x)$ について，x 中のいかなる変数も自由に現れない項の有限列 t が存在して，体系 T で $\phi_D(t,x)$ が証明可能となる．

この定理で存在が主張されている項の有限列 t を，ϕ^D のウィットネスと呼ぶ．以下でウィットネスを表すときには，代入先を示唆するように，上に横線を付けた $\bar{u}$ などの記号をできるだけ用いるようにしておく．ウィットネス $\bar{u}$ は，

ϕ^D 中の自由変数 z を，やはり自由変数として含んでいてよい[7]．

ハイティング算術が矛盾していれば，そこで原子文 $0=1$ も証明可能となるが，$(0=1)_D$ は $0=1$ そのものであり，空の有限列 u に何を代入しても $0=1$ のままなので，定理により体系 T でも $0=1$ が証明可能となる．しかし，体系 T では $0 \neq 1$ が証明可能なので，結局は体系 T も矛盾していることになってしまう．

さらに，系 2.2 を経由することで，ペアノ算術の無矛盾性が，体系 T の無矛盾性に還元される．

系 2.4 論理式 ϕ がペアノ算術で証明可能とし，$\psi \equiv \phi^N$ とする．このとき，$\psi^D \equiv \exists u \forall x\, \psi_D(u,x)$ となる $\psi_D(u,x)$ について，x 中のいかなる変数も自由に現れない項の有限列 t が存在して，体系 T で $\psi_D(t,x)$ が証明可能となる．

定理 2.3 の証明は，証明の構成に関する帰納法による．そのためには，直観主義述語論理の形式体系を固定する必要がある．どのような形式体系を使ってもよいが，以下の公理と推論規則を採用すると，証明が容易になる．

まず，命題論理については，以下の公理と推論規則を使う．

$$\frac{\phi \quad \phi \supset \psi}{\psi}, \qquad \frac{\phi \supset \psi \quad \psi \supset \theta}{\phi \supset \theta},$$

$$(\phi \vee \phi) \supset \phi, \qquad \phi \supset (\phi \wedge \phi),$$

$$\phi \supset (\phi \vee \psi), \qquad (\phi \wedge \psi) \supset \phi,$$

$$(\phi \vee \psi) \supset (\psi \vee \phi), \qquad (\phi \wedge \psi) \supset (\psi \wedge \phi),$$

$$\frac{\phi \supset \psi}{(\theta \vee \phi) \supset (\theta \vee \psi)},$$

$$\frac{\phi \supset (\psi \supset \theta)}{(\phi \wedge \psi) \supset \theta}, \qquad \frac{(\phi \wedge \psi) \supset \theta}{\phi \supset (\psi \supset \theta)},$$

$$\bot \supset \phi.$$

7) ウィットネスを自由変数を含まない閉じた項として定めることもできる．その場合には，$\exists u \forall x\, \phi_D(u,x,z)$ に対して，$\phi_D(tz,x,z)$ が証明可能となる．

上記の命題論理の公理と推論規則は，体系 T でもそのまま使えばよい．ただし，体系 T は古典命題論理上の体系なので

$$\phi \vee \neg\phi$$

も公理となる．

量化記号については，つぎの公理と推論規則を使う．

$$x \text{ が自由に現れない } \phi \text{ について} \quad \frac{\phi \supset \psi}{\phi \supset \forall x\, \psi}\,,$$

$$\forall x\, \phi \supset \phi[t/x], \qquad \phi[t/x] \supset \exists x\, \phi,$$

$$x \text{ が自由に現れない } \psi \text{ について} \quad \frac{\phi \supset \psi}{\exists x\, \phi \supset \psi}\,.$$

$\phi[t/x]$ は，ϕ での変数 x の自由な現れすべてに，任意の項 t を代入して得られる論理式である．λ 計算での変数への項の代入と同じように，ϕ での束縛変数の書き換えを前提とする．等号については，つぎの二つの公理を使う．

$$x = x, \qquad x = y \supset (\phi[x/z] \supset \phi[y/z])\,.$$

ただし，後者での ϕ は原子論理式に限る．また，体系 T 中の等式は，項の有限列の間の等式ではなく，項の間の等式で十分である．

以上の公理と推論規則に，算術固有の，後者関数に関する二つの公理と，加法と乗法の原始再帰的定義，および数学的帰納法を加えて，ハイティング算術が得られる．

定理 2.3 の証明は，ハイティング算術での形式的証明の構成に関する帰納法による．等号と後者関数に関する公理は，ダイアレクティカ解釈によって変化しないので，そのまま体系 T の公理となる．また加法と乗法に関する公理は，加法と乗法を再帰演算子によって定義し直すことで，正当化される．

述語論理の公理と推論規則に関するウィットネスは，基本的には，ダイアレクティカ解釈された公理と推論規則に，適当なパターン・マッチングを施すことで発見できる．

例として，公理 $\forall z\,\phi \supset \phi[t/z]$ を考えてみよう．あらかじめ

$$(\forall z\,\phi)^D \equiv \exists u \forall zx\,\phi_D(uz,x,z), \quad (\phi[t/z])^D \equiv \exists v \forall y\,\phi_D(v,y,t)$$

としたうえで，$(\forall z\,\phi \supset \phi[t/z])^D$ は

$$\exists xzv \forall uy \phi_D(u(zuy), xuy, zuy) \supset \phi_D(vu,y,t)$$

となる．ここで

$$\phi_D(u(\bar{z}uy), \bar{x}uy, \bar{z}uy) \supset \phi_D(\bar{v}u,y,t)$$

が体系 T で証明可能となるように，ウィットネス $\bar{x}, \bar{z}, \bar{v}$ をみつけたい．しかし，命題論理では，一般に $\phi \supset \phi$ が示せるので

$$u(\bar{z}uy) = \bar{v}u, \quad \bar{x}uy = y, \quad \bar{z}uy = t$$

が成り立つように，$\bar{x}, \bar{z}, \bar{v}$ を定めれば十分である．そこで

$$\begin{cases} \bar{z} \equiv \lambda uy\, t, \\ \bar{x} \equiv \lambda uy\, y, \\ \bar{v} \equiv \lambda u\, ut = \lambda u\, u(\bar{z}uy) \end{cases}$$

とする．束縛変数の書き換えに関する約束によって，u と y は項 t で自由に現れてはいない．

もう一つの例として，一般に三段論法 (modus ponens) と呼ばれる，ϕ と $\phi \supset \psi$ から ψ を導く推論規則を考える．それぞれのダイアレクティカ解釈を

$$\phi^D \equiv \exists u \forall x\,\phi_D(u,x), \quad (\phi \supset \psi)^D \equiv \exists xv \forall uy\,\phi_D(u,xuy) \supset \psi_D(vu,y)$$

とすると，帰納法の仮定により

$$\phi_D(\bar{u},x), \qquad \phi_D(u,\bar{x}uy) \supset \psi_D(\bar{v}u,y)$$

が体系 T で証明可能となる $\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}$ がすでにみつかっている．ここで，変数への任意の項の代入を許す推論規則により，ϕ_D に関するパターン・マッチングを行うことができる．

$$\phi_D(\bar{u}, \bar{x}\bar{u}y), \qquad \phi_D(\bar{u}, \bar{x}\bar{u}y) \supset \psi_D(\bar{v}\bar{u}, y).$$

したがって，同一の推論規則により

$$\psi_D(\bar{v}\bar{u}, y)$$

が体系 T で証明可能である．つまり，$\bar{v}\bar{u}$ が ψ^D のウィットネスとなる．

他の公理と推論規則についても，上と同様である．ただし，公理 $\phi \supset (\phi \wedge \phi)$ だけは例外である．また，数学的帰納法についても，議論が必要である．

公理 $\phi \supset \phi \wedge \phi$ のダイアレクティカ解釈は，$\phi^D \equiv \exists u \forall x\, \phi(u, x)$ を，束縛変数の書き換えをしながら結合して

$$\exists xvw \forall uyz\, [\phi_D(u, xuyz) \supset (\phi_D(vu, y) \wedge \phi_D(wu, z))]$$

となる．そこで

$$\phi_D(u, \bar{x}uyz) \supset (\phi_D(\bar{v}u, y) \wedge \phi_D(\bar{w}u, z))$$

が体系 T で証明可能となるウィットネス $\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}$ をみつけなければいけない．

パターン・マッチングによって，体系 T の公理 $\phi \supset (\phi \wedge \phi)$ に還元するというアイデアを踏襲すれば，ϕ_D の第 1 項については

$$u = \bar{v}u = \bar{w}u$$

が成り立たなければいけない．つまり

$$\bar{v} \equiv \bar{w} \equiv \lambda u\, u$$

とする．しかし，2 番目の項についても

$$\bar{x}uyz = y = z$$

とすることは不可能である．変数 y と変数 z は，異なる変数だからである．

そのために，$\phi_D(u, y)$ の「真理値」を計算して，それが偽であれば $\bar{x}uyz = y$ とし真であれば $\bar{x}uyz = z$ となるように，$\bar{x}$ を定める．

体系 T は，再帰演算子をもつため，その中ですべての原始再帰的関数を定義することができる．それにより，$\phi_D(u, x)$ の特性関数が体系 T で定義できる．つまり，つぎの補題が成り立つ．

補題 2.5　ハイティング算術の任意の論理式 ϕ について，体系 T で

$$(\phi_D(u,x) \supset t_\phi ux = 0) \wedge (\neg\phi_D(u,x) \supset t_\phi ux = 1)$$

が証明できる項 t_ϕ が存在する．

証明　ϕ の構成に関する帰納法による．型 0 の変数 x と y についての等式 $x = y$ の特性関数は原始再帰的関数であることと，命題結合子に相当するブール演算もすべて原始再帰的関数であることを使う．■

さらに，高次の型をもつ関数の原始再帰的定義を使って，場合分けによる定義も，体系 T の内部でできる．つまり，つぎの補題が成り立つ．

補題 2.6　体系 T でのそれぞれの型 σ について，体系 T で

$$(w = 0 \supset C_\sigma wu^\sigma v^\sigma = u^\sigma) \wedge (w = \mathrm{S}(x) \supset C_\sigma wu^\sigma v^\sigma = v^\sigma)$$

が証明できる項 C_σ が存在する．

証明　$s \equiv \lambda x^0 y^\sigma\, v^\sigma$ を使って $C_\sigma \equiv \lambda w^0 \lambda u^\sigma \lambda v^\sigma\, Ru^\sigma sw^0$ とすればよい．■

C_σ はプログラム言語での If にあたるもので，$C_\sigma wu^\sigma v^\sigma$ は If w then u^σ else v^σ と読んでよい．

補題 2.5 と補題 2.6 によって，体系 T で

$$(\phi_D(u,y) \supset \bar{x}uyz = z) \wedge (\neg\phi_D(u,y) \supset \bar{x}uyz = y)$$

が証明可能となる項の有限列 $\bar{x}$ が存在する．体系 T は古典命題論理上の体系なので，$\phi_D(u,y)$ に関する排中律を使って，さらに

$$\phi_D(u, \bar{x}uyz) \supset (\phi_D(u,y) \wedge \phi_D(u,z))$$

が証明可能である．

特性関数と場合分けによる定義を導入するために再帰演算子を使ったが，その目的のためだけであれば，原始再帰的関数すべてと，場合分けによる定義

を与える演算子を，体系に組み込んでおけば十分である．しかし，数学的帰納法を扱うためには，一般的な再帰演算子が本質的に必要となる．

数学的帰納法は，$\phi[0/z]$ と $\phi \supset \phi[\mathrm{S}(z)/z]$ から，$\phi[t/z]$ を導くことを許す．まず，メタ数学的な帰納法の仮定によって，$\phi[0/z]$ と $\phi \supset \phi[\mathrm{S}(z)/z]$ から得られる論理式を，それぞれ $\alpha(x)$ と $\beta(u, y, z)$ と書くことにしよう．つまり，項の有限列 $\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}$ が存在して

$$\alpha(x) \equiv \phi_D(\bar{u}, x, 0), \qquad \beta(u, y, z) \equiv \phi_D(u, \bar{x}uy, z) \supset \phi_D(\bar{v}u, y, \mathrm{S}(z))$$

が体系 T で証明可能であると仮定する．

みつけたい $\phi^D[t/z]$ のウィットネスを，$\bar{u}_t$ と書いてみよう．つまり

$$\phi_D(\bar{u}_t, x, t)$$

が成り立つ $\bar{u}_t$ である．ここで，t について，帰納的に考えてみる．ただし，$\bar{x}$ と $\bar{v}$ は，t が代入される自由変数 z を含んでいてもよいので，$\bar{x}$ と $\bar{v}$ での z に i を代入して得られる項を，それぞれ $\bar{x}_i$ と $\bar{v}_i$ と書くことにする．

t が 0 に等しいときには，$\alpha(x)$ がそのまま使えるので，$\bar{u}_0 \equiv \bar{u}$ とすればよい．t が i に等しいときのウィットネス $\bar{u}_i$ がすでにみつかっているとしよう．すると，x に $\bar{x}_i\bar{u}_i y$ を代入した形での

$$\phi_D(\bar{u}_i, \bar{x}_i\bar{u}_i y, i)$$

が証明できる．さらに

$$\beta(\bar{u}_i, y, i) \equiv \phi_D(\bar{u}_i, \bar{x}_i\bar{u}_i y, i) \supset \phi_D(\bar{v}_i\bar{u}_i, y, \mathrm{S}(i))$$

なので，三段論法によって $\phi_D(\bar{v}_i\bar{u}_i, y, \mathrm{S}(i))$ が導ける．つまり $\bar{u}_{\mathrm{S}(i)} \equiv \bar{v}_i\bar{u}_i$ とすればよい．

したがって，原始再帰的定義によって，項 U を

$$\begin{cases} \mathrm{U}(0) = \bar{u}, \\ \mathrm{U}(\mathrm{S}(i)) = \bar{v}_i(\mathrm{U}(i)) \end{cases}$$

と定義し，$\bar{u}_t \equiv \mathrm{U}(t)$ とおけばよいはずである．

実際，$\phi_D(\mathrm{U}(t), y, t)$ は体系 T で証明できる．しかし，それを示すためには，少し準備をしなければいけない．後者関数とは反対に，自然数に対して，その直前の自然数を返す前者関数を考えよう．ただし，0 に対しては，0 自身を返すとする．前者関数は，原始再帰的関数であり，体系 T の内部で定義できる．それを表す項を P としよう．つまり

$$\begin{cases} \mathrm{P}(0) = 0, \\ \mathrm{P}(\mathrm{S}(x)) = x \end{cases}$$

が体系 T で証明できる．これから，さらに

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x, \\ x \dot{-} \mathrm{S}(y) = \mathrm{P}(x \dot{-} y) \end{cases}$$

を満たすカットオフ引き算も得られる．読みやすさのために，$x \dot{-} y$ という記法を，体系 T の項としてそのまま使う．

$\phi_D(\mathrm{U}(t), y, t)$ の証明可能性は，つぎのような証明可能な論理式の下降列に基づいている．

$$\phi_D(\mathrm{U}(t), y, t), \quad \phi_D(\mathrm{U}(\mathrm{P}(t)), \bar{x}_{\mathrm{P}(t)}(\mathrm{U}(\mathrm{P}(t)))y, \mathrm{P}(t)), \quad \ldots$$

そのため，$\phi_D(\mathrm{U}(t), y, t)$ を，そのままで t に関する帰納法で証明することはできない．変数 y に対する代入が必要になるからである．

そこで，y に対して代入される項を，あらかじめ定義しておこう．まず，t から i だけ下がった個所 $t \dot{-} i$ で，y に代入されるべき項 $\mathrm{V}(i)$ を定義する．$i = 0$ のときには，これは y 自身である．以後は

$$\phi_D(\mathrm{U}(t \dot{-} i), \mathrm{V}(i), t \dot{-} i) \mapsto \phi_D(\mathrm{U}(t \dot{-} \mathrm{S}(i)), \bar{x}_{t \dot{-} \mathrm{S}(i)}(\mathrm{U}(t \dot{-} \mathrm{S}(i)))\mathrm{V}(i), t \dot{-} \mathrm{S}(i))$$

という代入がくり返されるので

$$\begin{cases} \mathrm{V}(0) = y, \\ \mathrm{V}(\mathrm{S}(i)) = \bar{x}_{t \dot{-} \mathrm{S}(i)}(\mathrm{U}(t \dot{-} \mathrm{S}(i)))(\mathrm{V}(i)) \end{cases}$$

とする．そして，t を固定したうえで，任意の $i \leq t$ について

$$\phi_D(\mathrm{U}(t \dot{-} i), \mathrm{V}(i), t \dot{-} i)$$

を示せば十分である．つまり，$i = 0$ とおけば，$t \dot{-} 0 = 0$ および $\mathrm{V}(0) = y$ なので，$\phi_D(\mathrm{U}(t), y, t)$ が帰結する．

しかし，これを i に関する数学的帰納法によって，そのまま示すことはできない．$i = 0$ の場合は，$i = 1$ の場合に依存するからである．そこで，$i = t \dot{-} k$ とおいて，k に関する数学的帰納法を使う．その際に，関係 $x < y$ を $y \dot{-} x$ を使って定義したうえで，カットオフ引き算のもつ以下の性質に注意する．

補題 2.7　以下はすべて体系 T の内部で証明できる．

1. $x = 0 \vee x = \mathrm{S}(\mathrm{P}(x))$.
2. $x \leq y \supset y \dot{-} (y \dot{-} x) = x$.
3. $x < y \supset \mathrm{S}(y \dot{-} \mathrm{S}(x)) = y \dot{-} x$.

あらためて

$$\Phi(k) \equiv \phi_D(\mathrm{U}(k), \mathrm{V}(t \dot{-} k), k)$$

とおく．そのうえで，$k \leq t \supset \Phi(k)$ を，k に関する数学的帰納法によって証明する．そうすれば，今度は $k = t$ として，$\phi_D(\mathrm{U}(t), y, t)$ が得られ，$\mathrm{U}(t)$ が求めるウィットネスであることがわかる．

補題 2.8　α と β が体系 T で証明可能であれば，$k \leq t \supset (\phi(\mathrm{P}(k)) \supset \Phi(k))$ も体系 T で証明できる．

証明　$k = 0$ と $k = \mathrm{S}(\mathrm{P}(k))$ の場合に分けて証明する．$k = 0$ のときには，$0 = \mathrm{P}(0)$ なので，$\Phi(\mathrm{P}(0)) \supset \Phi(0)$ が明らかに証明可能である．$k = \mathrm{S}(\mathrm{P}(k))$ のときには，$\beta(\mathrm{U}(\mathrm{P}(k)), \mathrm{V}(t \dot{-} k), \mathrm{P}(k))$ が，つぎの論理式と同値になる．

$$\phi_D(\mathrm{U}(\mathrm{P}(k)), \bar{x}_{\mathrm{P}(k)}(\mathrm{U}(\mathrm{P}(k)))(\mathrm{V}(t \dot{-} k)), \mathrm{P}(k)) \supset \phi_D(\mathrm{U}(k), \mathrm{V}(t \dot{-} k), k)$$

そのため，$k \leq t$ という仮定のもとで，$\bar{x}_{\mathrm{P}(k)}(\mathrm{U}(\mathrm{P}(k)))(\mathrm{V}(t \dot{-} k)) = \mathrm{V}(t \dot{-} \mathrm{P}(k))$ を示せば十分である．しかし，$k = \mathrm{S}(\mathrm{P}(k))$ より $\mathrm{P}(k) < t$ なので，$t \dot{-} \mathrm{P}(k) = \mathrm{S}(t \dot{-} k)$ である．したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(t\dot{-}\mathrm{P}(k)) &= \bar{x}_{t\dot{-}(t\dot{-}\mathrm{P}(k))}(\mathrm{U}(t\dot{-}(t\dot{-}\mathrm{P}(k))))(\mathrm{V}(t\dot{-}k)) \\ &= \bar{x}_{\mathrm{P}(k)}(\mathrm{U}(\mathrm{P}(k)))(\mathrm{V}(t\dot{-}k))\end{aligned}$$

が成り立つ. ■

系 2.9 α と β が体系 T で証明可能であれば, $k \leq t \supset \Phi(k)$ も体系 T で証明できる.

証明 k に関する数学的帰納法による. $\mathrm{U}(0) = \bar{u}$ より $\Phi(0)$ は $\alpha(\mathrm{V}(t))$ と同値なので, $0 \leq t \supset \Phi(0)$ も導ける. $z \leq t \supset \Phi(z)$ を仮定する. さらに, $\mathrm{S}(z) \leq t$ を仮定して, $\Phi(\mathrm{S}(z))$ を示せばよい. このとき, 補題 2.8 より $\Phi(\mathrm{P}(\mathrm{S}(z))) \supset \Phi(\mathrm{S}(z))$ であり, かつ $\mathrm{P}(\mathrm{S}(z)) = z$ である. また, $z \leq t$ なので $\Phi(z)$ である. したがって, 三段論法により, $\Phi(\mathrm{S}(z))$ が導ける. ■

定理 2.10 α と β が体系 T で証明可能であれば, $\phi_D(\mathrm{U}(t), y, t)$ も体系 T で証明できる.

証明 上記系 2.9 で $k = t$ とすればよい. ■

第3章
ダイアレクティカ解釈の展開

ゲーデルのダイアレクティカ解釈は，ペアノ算術の無矛盾性を，体系 T の無矛盾性に還元する．しかし，体系 T それ自身の性質も，やはり数学的な考察の対象となる．とくに，体系 T の無矛盾性は，どの程度の強さの数学で証明できるのか，という問題がある．また，ダイアレクティカ解釈は，ペアノ算術だけではなく，そのさまざまなバリエーションに対しても応用できる．さらに，圏論の枠組みで考えると，ダイアレクティカ解釈での構成を一般化して，圏論的な構造をとりだすことができる．

この章では，以上のような点について，ダイアレクティカ解釈に関するゲーデル以後の研究を紹介する．まず，体系 T のモデルについて解説する．とくに重要なのは，計算可能関数を使った HRO モデル（3.1 節）と，体系 T の項の正規化によって得られる項モデル（3.2 節）である．こうしたモデルの構成で必要になる数学を考察することによって，体系 T の無矛盾性証明に必要な数学の範囲もわかる．また，ペアノ算術のバリエーションについては，限定算術と 2 階算術に対するダイアレクティカ解釈の応用を，ごく簡単に紹介する（3.3 節）．さらに，ダイアレクティカ解釈から抽出できる圏論的な構造についても，少しだけ解説する（3.4 節）．

3.1 計算可能関数を使ったモデル

ゲーデルのダイアレクティカ解釈は，ペアノ算術の無矛盾性を，「抽象的概念」によって拡張された「有限的」な手段によって証明する，という意図をもっていた．体系 T を，その無矛盾性は自明なものとして，メタ数学の中に受け入れてしまえば，この意図は満たされたことになる．しかし，体系 T はさしあたり形式的な体系であり，その数学的な内容は必ずしも自明ではない．ここでは，体系 T の内実を与えるモデルとして，集合論的なモデルと，計算可能関数を使った HRO モデルを紹介しておく[1)]．つぎの 3.2 節では，体系 T の項自身を使ったモデルについて紹介する．

ある形式体系に対するモデルの構成は，その形式体系の無矛盾性を証明するために，どの程度の強さの数学で十分なのかも教えてくれる．つまり，モデルが構成できれば，無矛盾性が証明されたことになるので，モデルの構成に必要な数学の範囲を考えればよいからである．

必要な数学の範囲に関する配慮を度外視すれば，体系 T のモデルは，ツェルメロ・フレンケル集合論の中で，簡単に与えられる．まず，型 σ は，つぎのように再帰的に定義される集合 $[\![\sigma]\!]$ として解釈される．

1. $[\![0]\!]$ は自然数全体の集合とする．
2. $[\![\sigma \to \tau]\!]$ は，$[\![\sigma]\!]$ から $[\![\tau]\!]$ への関数すべての集合とする．

項の解釈を定めるためには，それぞれの変数 x^σ に対して，$[\![\sigma]\!]$ のなんらかの要素を対応付ける関数 η を考える．こうした η は付値と呼ばれる．型 σ に属する項 t は，与えられた η のもとで，$[\![\sigma]\!]$ の要素 $[\![t]\!]_\eta$ として解釈される．$[\![t]\!]_\eta$ は，つぎのように再帰的に定義される．

1. $[\![x^\sigma]\!]_\eta$ は $\eta(x^\sigma)$ とする．
2. $[\![0]\!]_\eta$ は自然数 0 とする．
3. $[\![\mathrm{S}]\!]_\eta$ は後者関数とする．

---

1) [Troelstra 1973] および [Avigad and Feferman 1998] を参照．

4. $[\![\lambda x^{\sigma}\, t]\!]_{\eta}$ は，$[\![\sigma]\!]$ から，項 t の型 τ の解釈 $[\![\tau]\!]$ への関数 $a \mapsto [\![t]\!]_{\eta[a/x^{\sigma}]}$ とする．ただし，ここで $\eta[a/x^{\sigma}]$ は，x^{σ} に対して a を返し，それ以外は η と同一な付値とする．
5. $[\![ts]\!]_{\eta}$ は $[\![t]\!]_{\eta}\,([\![s]\!]_{\eta})$ とする．
6. $[\![\mathrm{R}_{\sigma}]\!]$ は，関数 g, h に対して，$f(0) = g$ および $f(\mathrm{S}(n)) = h(n, f(n))$ を満たす関数 f を返す関数とする．型の一致は前提とする．

等式 $t = s$ は，$[\![t]\!]_{\eta} = [\![s]\!]_{\eta}$ と解釈される．命題論理については，命題論理のモデル論と同じである．

しかし，「自然数上の有限型の計算可能関数」というゲーデルのアイデアを，より適切に反映しているのは，計算可能関数を階層化して得られる，つぎのようなモデルである．

任意の計算可能関数には，それを計算するプログラムのコードである自然数を対応付けられる．反対に，任意の自然数には，それをプログラムのコードとして読み取ることで，計算可能関数を対応付けられる．自然数 x をプログラムのコードとする計算可能関数を，$\{x\}$ で表すことにしよう．また，$\{x\}$ が y について定義されていて，$\{x\}$ を y に適用した結果が z となることを，$\{x\}\,(y) \simeq z$ と表す．

そこで，型 0 の解釈 $[\![0]\!]$ を自然数全体の集合としたうえで，高次の型 $\sigma \to \tau$ を，プログラムのコードとみなした自然数の集合として解釈する．この型の解釈に属するプログラムは，$[\![\sigma]\!]$ に属する自然数を受け取って，$[\![\tau]\!]$ に属する自然数を返す関数としたい．つまり，型 σ の解釈 $[\![\sigma]\!]$ を，つぎのように再帰的に定義する．

1. $[\![0]\!]$ は自然数全体の集合とする．
2. $[\![\sigma \to \tau]\!]$ は，自然数の集合

$$\{x \mid (\forall y \in [\![\sigma]\!])\,(\exists z \in [\![\tau]\!])\;\{x\}\,(y) \simeq z\}$$

とする．

自然数の集合のこうした階層構造は，「継承的に再帰的な演算」のつくる構造

という意味で，HRO (hereditarily recursive operations) と呼ばれる．

項 t の解釈では，付値 η を使う代わりに，自由変数への依存関係を関数として明示してしまったほうが便利である．t を型 τ に属する項で，そこに現れるすべての自由変数は変数列 $H \equiv x^{\sigma_1}, x^{\sigma_2}, \ldots, x^{\sigma_n}$ に含まれるとしよう．このとき項 t を，あらためて $H \triangleright t : \tau$ と書いたうえで，それを $[\![\sigma_1]\!], \ldots, [\![\sigma_n]\!]$ から $[\![\tau]\!]$ への計算可能関数によって解釈する．

自由変数に代入される自然数列を $a \equiv a_1, \ldots, a_n$ としておこう．

1. $[\![H \triangleright x^{\sigma_i} : \sigma_i]\!]$ は，$a \mapsto a_i$ とする．
2. $[\![H \triangleright 0 : 0]\!]$ は，いつでも自然数 0 を返す関数とする．
3. $[\![H \triangleright \mathrm{S} : 0 \to 0]\!]$ は，いつでも後者関数のコードを返す関数とする．
4. $[\![H \triangleright ts : \tau]\!]$ は，$a \mapsto \{[\![H \triangleright t : \sigma \to \tau]\!](a)\}\,([\![H \triangleright t : \sigma]\!](a))$ とする．

$\lambda x^{\sigma}\, t$ の解釈は，計算可能性理論でのつぎの s-m-n 定理によって与えられる．

定理 3.1（s-m-n 定理） 任意の m, n に対して原始再帰的関数 s^m_n が存在し，任意の長さ m の自然数列 y と長さ n の自然数列 z に関して

$$\{x\}\,(y, z) \simeq \{s^m_n(x, y)\}\,(z)$$

が成り立つ．

定理 3.1 から $[\![H, x^{\sigma} \triangleright t : \tau]\!] = e$ としたとき，

$$\{e\}\,(a, a_{n+1}) \simeq \{s^n_1(e, a)\}\,(a_{n+1})$$

が成り立つ．したがって，つぎのようにすればよい．

5. $[\![H \triangleright \lambda x^{\sigma}\, t : \sigma \to \tau]\!]$ は，$a \mapsto s^n_1\,([\![x^{\sigma}, H \triangleright t : \tau]\!], a)$ とする．

項 R_{σ} の解釈は，計算可能性理論でのつぎの第二再帰定理から得られる．

定理 3.2（第二再帰定理） $f(x)$ をすべての自然数について定義されている計算可能関数とする．このとき，自然数 e が存在して，任意の自然数列 y に対して，つぎが成り立つ．

$$\{f(e)\}\,(y) \simeq \{e\}\,(y).$$

系 3.3　$g(x,y)$ を任意の計算可能関数とする．このとき，自然数 e が存在して，任意の自然数列 y に対して，つぎが成り立つ．

$$g(e,y) \simeq \{e\}(y).$$

証明　g のコードを a とすれば，定理 3.1 によって

$$g(x,y) \simeq \{a\}(x,y) \simeq \left\{s^1_n(a,x)\right\}(y)$$

であり，さらに $s^1_n(a,x)$ に定理 3.2 を適用して $\left\{s^1_n(a,e)\right\}(y) \simeq \{e\}(y)$ を満たす e が得られる．■

R_σ の満たすべき等式は

$$\begin{cases} \mathrm{R}_\sigma xy\,0 = x \\ \mathrm{R}_\sigma xy(\mathrm{S}(z)) = yz(\mathrm{R}_\sigma xyz) \end{cases}$$

であった．原始再帰的関数の範囲で，前者関数 $\mathrm{pred}(x)$ と，$z=0$ であれば x を返し，そうでなければ y を返す関数 $\mathrm{cond}(z,x,y)$ が存在するので，それへの代入によって得られる

$$\mathrm{cond}(z,x,\{\{y\}(\mathrm{pred}(z))\}(\{w\}(x,y,\mathrm{pred}(z))))$$

が計算可能関数として存在する．これに系 3.3 を適用すれば，つぎの条件を満たす e が得られる．

$$\{e\}(x,y,z) \simeq \mathrm{cond}(z,x,\{\{y\}(\mathrm{pred}(z))\}(\{e\}(x,y,\mathrm{pred}(z)))).$$

これは，R_σ の満たすべき等式に対応している．さらに，e', e'' を

$$\{e'\}(x,y) \simeq s^2_1(e,x,y), \quad \{e''\}(x) \simeq s^1_1(e',x)$$

のように定めれば

$$\begin{aligned} \{\{\{e''\}(x)\}(y)\}(z) &\simeq \left\{\left\{s^1_1(e',x)\right\}(y)\right\}(z) \\ &\simeq \{\{e'\}(x,y)\}(z) \simeq \left\{s^2_1(e,x,y)\right\}(z) \simeq \{e\}(x,y,z) \end{aligned}$$

が成り立つ．そこで，この e'' を R_σ の解釈とする．

6. $[\![H \triangleright \mathrm{R}_\sigma : \sigma \to (0 \to \sigma \to \sigma) \to 0 \to \sigma]\!]$ は，任意の a に対して上記のコード e'' を返す関数とする．

体系 T の論理式 ϕ は，やはり含まれる自由変数を明示して $H \triangleright \phi$ と書いたうえで，H 中の自由変数のとる値 a から真理値への関数 $[\![H \triangleright \phi]\!]$ として解釈する．とくに，$[\![H \triangleright s = t]\!](a)$ は，$[\![H \triangleright s : \sigma]\!](a)$ と $[\![H \triangleright t : \sigma]\!](a)$ が自然数として同一のときに真であるとする．そこから，通常の場合と同じようにして，命題結合子を含む論理式の解釈も定める．すると，以下の定理が成り立つ．

定理 3.4 以上のように定義された HRO での解釈は，体系 T のモデルを与える．つまり，体系 T で論理式 ϕ が証明可能であれば，そこに含まれる自由変数の型に対応した任意の $a_1 \in [\![\sigma_1]\!], \ldots, a_n \in [\![\sigma_n]\!]$ について，$[\![H \triangleright \phi]\!](a)$ が真となる．

定理 3.4 からは，体系 T の無矛盾性が帰結する．つまり，体系 T で論理式 $0 = 1$ が証明可能であれば，$0 = 1$ が実際に成り立つ．これは不可能なので，体系 T で $0 = 1$ は証明できない．したがって，体系 T は無矛盾である．

体系 T の無矛盾性は，ペアノ算術の無矛盾性を含意するので，定理 3.4 はペアノ算術の内部では証明できない．しかし，型 σ の解釈 $[\![\sigma]\!]$ は，すべてペアノ算術の論理式として表すことができる．関係 $\{x\}(y) \simeq z$ は，量化記号をもたない論理式 $T(x, y, u)$ と，原始再帰的関数 $U(u)$ によって

$$\exists u\, (T(x, y, u) \land U(u) = z)$$

というペアノ算術での論理式で表せる．また，$[\![\sigma \to \tau]\!]$ を表す論理式も，$[\![\sigma]\!]$ と $[\![\tau]\!]$ を表す論理式から，再帰的に定義できる．そのため，任意の $H \triangleright t : \tau$ について

$$\mathrm{PA} \vdash (\forall x_1 \in [\![\sigma_1]\!]) \ldots (\forall x_n \in [\![\sigma_n]\!])\ [\![H \triangleright t : \tau]\!](x_1, \ldots, x_n) \in [\![\tau]\!]$$

は成り立つ．そこからさらに，$\mathrm{T} \vdash \phi$ である任意の $H \triangleright \phi$ について

$$\mathrm{PA} \vdash (\forall x_1 \in [\![\sigma_1]\!]) \ldots (\forall x_n \in [\![\sigma_n]\!])\ [\![H \triangleright \phi]\!](x_1, \ldots, x_n) = 0$$

も成り立つ．しかし，これは定理 3.4 がペアノ算術で証明できるということではない．ここでの「任意の $H \triangleright \phi$ について」という量化は，ペアノ算術の内部には属さないからである．また，R_σ を扱う際に，$[\![\sigma]\!]$ を含んだ論理式に関する数学的帰納法が必要になるが，σ が複雑になるにつれ，$[\![\sigma]\!]$ の論理的複雑さも増大するので，数学的帰納法が適用される論理式の論理的複雑さに上限を設けることができない．

3.2　項の正規化によるモデル

1 階述語論理の完全性証明でもそうであるように，体系 T のモデルを体系 T の閉じた項それ自身から構成することもできる[2)]．そうしたモデルは，項モデルと呼ばれる．ただし，任意の閉じた項がモデルの要素となるわけではなく，以下に定義される項の還元関係 $s \rightarrowtail t$ のもとでの正規な項だけが使われる．

還元関係 $s \rightarrowtail t$ の定義で基本となるのは，抽象 $\lambda x^\sigma\, t$ と再帰演算子 R_σ に関する公理を，等式の左辺から右辺への変形とみて得られる，つぎのような関係である．

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x^\sigma\, t)\, s & \mapsto & t[s/x^\sigma] \\
\mathrm{R}_\sigma r s\, 0 & \mapsto & r \\
\mathrm{R}_\sigma r s(\mathrm{S}(t)) & \mapsto & st(\mathrm{R}_\sigma r s t)
\end{array}
$$

ここで矢印の左側に登場する項 $(\lambda x^\sigma\, t)\, s$, $\mathrm{R}_\sigma r s\, 0$, $\mathrm{R}_\sigma r s(\mathrm{S}(t))$ は，リデックスと呼ばれる．この関係 $s \mapsto t$ は，抽象と適用による項の構成に沿って，自然に拡張できる．つまり，$s \mapsto s'$ であれば，$st \mapsto s't$, $ts \mapsto ts'$, $\lambda x^\sigma\, s \mapsto \lambda x^\sigma\, s'$ がそれぞれ成り立つと定める．

還元関係 $s \rightarrowtail t$ は，以上のように拡張された $s \mapsto t$ を含む関係で，推移性を満たす最小のものである．これは，つぎのようにして再帰的に定義できる．

1. $s \mapsto t$ であれば $s \rightarrowtail t$ である．
2. $s \rightarrowtail t$ かつ $t \mapsto t'$ であれば，$s \rightarrowtail t'$ である．

2)　[Troelstra 1973] および [Hindley and Seldin 1986] を参照．

こうした還元関係は，項の書き換えとも呼ばれる．項の書き換えは，プログラムの計算とみなせる．

項 s が，それ以上はもはや還元できない場合，つまり，$s \rightarrowtail t$ を満たす項 t が存在しない場合，s は正規な項と呼ばれる．

一般に項 s から出発して，還元をくり返したとき，還元は正規な項に達して止まるかもしれないし，そうでないかもしれない．また，正規な項に達したとしても，それがいつも同じであるとは限らない．

項 s から還元によって正規な項 t に達するとき，項 t は s の正規形と呼ばれる．そして，項 s が正規形をもつ場合，つまり s の正規形となる正規な項 t が存在する場合，s は正規化可能であると呼ばれる．正規化可能性は，ある手順に沿った計算が止まることを表している．

また，二つの異なる正規な項 t, t' が，s の正規形となることはない場合，つまり，任意の正規な項 t, t' について，$s \rightarrowtail t$ かつ $s \rightarrowtail t'$ であれば，$t \equiv t'$ が成り立つ場合，項 s はチャーチ・ロッサー性をもつといわれる．還元を計算と考えると，これは計算結果の単一性を表している．

さらに，s から出発して，還元 $t \mapsto t'$ をくり返すと，必ず正規形に達する場合，つまり $s_0 \equiv s$，かつ，任意の i について $s_i \rightarrowtail s_{i+1}$ を満たす項の無限列 $\{s_i\}$ が存在しない場合，s は強正規化可能であるという．これは，どのような手順で計算しても，計算が必ず止まることを表している．

体系 T の項は，すべてチャーチ・ロッサー性をもち，強正規化可能である．つまり，任意の項 s に対して，それの正規形となる項が，正確にただ一つだけ存在する．このため，型 σ に属する閉じた正規な項すべての集合を，型 σ の解釈とすることによって，体系 T の項を解釈することができる．項 s は，自由変数に対する閉じた正規な項の割り当てのもとで，それらを s に代入して得られる閉じた項の正規形によって解釈される．

体系 T のチャーチ・ロッサー性は，適当なコーディングを経由して，ペアノ算術の中で証明できるが，正規化可能性は，ペアノ算術の中では証明できない．この事情を，強正規化可能性の標準的な証明に沿って，少し眺めておこう．

まず，それぞれの型 σ について，σ に属する項の集合 Comp_σ を，以下の

ように再帰的に定義する．

1. Comp_0 は，型 0 の強正規化可能な項すべての集合とする．
2. $\mathrm{Comp}_{\sigma\to\tau}$ は，型 $\sigma \to \tau$ の項 s で

$$(\forall t \in \mathrm{Comp}_\sigma)\ st \in \mathrm{Comp}_\tau$$

を満たすものすべての集合とする．

Comp_σ は計算可能性述語と呼ばれ，その要素である項は計算可能な項と呼ばれる．

補題 3.5 つぎが成り立つ．

1. 正規な項は，t_1 を x^τ, 0, S, R_σ のいずれかとして，$m \geq 0$ および $n \geq 1$ について

$$\lambda x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_m^{\sigma_m}\, t_1 t_2 \ldots t_n$$

という形をしている．
2. 型 0 に属する閉じた正規な項は，すべて $\mathrm{S}(\ldots(\mathrm{S}(0))\ldots)$ という形をしている．

証明 まず 1 を項 s の構成に関する帰納法によって証明する．s が $x^\tau, 0, \mathrm{S}, \mathrm{R}_\sigma$ のいずれかであるときには，即座に明らかである．また，s が抽象の場合には，帰納法の仮定から明らかである．s が適用 $s_1 s_2$ のときには，帰納法の仮定と s が正規な項であるという条件により，t_1 を $x^\tau, 0, \mathrm{S}, \mathrm{R}_\sigma$ のいずれかとして，$s_1 \equiv t_1 t_2 \ldots t_n$ であり，したがって $s \equiv t_1 t_2 \ldots t_n s_2$ である．

つぎに 2 を，やはり項 s の構成に関する帰納法によって示す．$\mathrm{S}(\ldots(\mathrm{S}(0))\ldots)$ という形の項を，数表現と呼ぶことにしておこう．s を型 0 に属する閉じた正規な項とすると，1 によって s は 0, $\mathrm{S}(t_1)$，もしくは $\mathrm{R}_\sigma t_1 t_2 t_3 \ldots t_n$ のいずれかの形をしている．$s \equiv \mathrm{S}(t_1)$ のときには，t_1 に帰納法の仮定が適用できて，s は数表現となる．$s \equiv \mathrm{R}_\sigma t_1 t_2 t_3 \ldots t_n$ と仮定すると，t_3 に帰納法の仮定が適用できて，s がリデックスになってしまうため，矛盾する． ■

補題 3.6 型 $\sigma \equiv \tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to 0$ について考える．$s \in \mathrm{Comp}_\sigma$ となるのは，任意の $t_1 \in \mathrm{Comp}_{\tau_1}, \ldots, t_n \in \mathrm{Comp}_{\tau_n}$ について，$st_1 \ldots t_n$ が強正規化可能であるときであり，かつそのときに限る．

証明 型の構成に関する帰納法による．$\sigma \equiv 0$ のときには，Comp_0 の定義により，$s \in \mathrm{Comp}_0$ となるのは s が強正規化可能であるときである．$\sigma \equiv \tau_1 \to \sigma' \equiv \tau_1 \to \tau_2 \to \cdots \to \tau_n \to 0$ のときには，Comp_σ の定義により，$s \in \mathrm{Comp}_\sigma$ となるのは，任意の $t_1 \in \mathrm{Comp}_{\tau_1}$ について，$st_1 \in \mathrm{Comp}_{\sigma'}$ となるときであり，これはさらに帰納法の仮定により任意の $t_2 \in \mathrm{Comp}_{\tau_2}, \ldots, t_n \in \mathrm{Comp}_{\tau_n}$ について，$st_1t_2 \ldots t_n$ が強正規化可能となるときである． ■

補題 3.7 $t \in \mathrm{Comp}_\sigma$ かつ $t \rightarrowtail s$ ならば，$s \in \mathrm{Comp}_\sigma$ である．

定理 3.8 任意の型 σ について，以下が成り立つ．

1. 変数 x^σ は，すべて Comp_σ に属する．
2. $t \in \mathrm{Comp}_\sigma$ ならば，t は強正規化可能である．

証明 型の構成に関する帰納法による．σ が型 0 のときは明らかであるので，σ を $\tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to 0$ としよう．帰納法の仮定により，任意の $t_1 \in \mathrm{Comp}_{\tau_1}, \ldots, t_n \in \mathrm{Comp}_{\tau_n}$ は強正規化可能であるので，$x^\sigma t_1 \ldots t_n$ も強正規化可能である．また，$t \in \mathrm{Comp}_\sigma$ であれば，帰納法の仮定により，$x^{\tau_1} \in \mathrm{Comp}_{\tau_1}$，かつ tx^{τ_1} は強正規化可能である．したがって，t も強正規化可能でなければいけない． ■

補題 3.9 $0 \in \mathrm{Comp}_0$ かつ $\mathrm{S} \in \mathrm{Comp}_{0\to 0}$ である．

補題 3.10 $\mathrm{R}_\sigma \in \mathrm{Comp}_{\sigma\to(0\to\sigma\to\sigma)\to 0\to\sigma}$ である．

証明 任意の $r \in \mathrm{Comp}_\sigma, s \in \mathrm{Comp}_{0\to\sigma\to\sigma}, t \in \mathrm{Comp}_0$ について，$R_\sigma rst \in \mathrm{Comp}_\sigma$ を示せば十分である．t が閉じた項の場合には，その正規形は数表現となるので，現れる S の数に関する帰納法を使う．そうでない場合には，$\sigma \equiv \tau_1 \to \cdots \to \tau_n \to 0$ として，任意の $t_1 \in \mathrm{Comp}_{\tau_1}, \ldots, t_n \in \mathrm{Comp}_{\tau_n}$ について，$\mathrm{R}_\sigma rstt_1 \ldots t_n$ が強正規化可能となることを使う． ■

補題 3.11 任意の $s \in \mathrm{Comp}_\sigma$ について $t[s/x^\sigma] \in \mathrm{Comp}_\tau$ であれば，$\lambda x^\sigma\, t \in \mathrm{Comp}_{\sigma\to\tau}$ である．

証明 任意の $s \in \mathrm{Comp}_\sigma$ について $(\lambda x^\sigma\, t)\, s \in \mathrm{Comp}_\tau$ を示せばよい．$\tau \equiv \tau_1 \to \cdots \tau_n \to 0$ として，任意の $s_1 \in \mathrm{Comp}_{\tau_1}, \ldots, s_n \in \mathrm{Comp}_{\tau_n}$ を考える．$x^\sigma \in \mathrm{Comp}_\sigma$ であり，$t \equiv t[x^\sigma/x^\sigma]$ なので，$t \in \mathrm{Comp}_\tau$ でもある．そのため，$t, s, s_1, \ldots, s_n$ はすべて強正規化可能であり，$(\lambda x^\sigma\, t)\, s s_1 \ldots s_n$ の還元では，$t \rightarrowtail t'$ および $s \rightarrowtail s'$ となる t' と s' を使った $(\lambda x^\sigma\, t')\, s' \mapsto t'[s'/x^\sigma]$ だけが問題となる．しかし，$t[s/x^\sigma] \in \mathrm{Comp}_\tau$ および $t[s/x^\sigma] \rightarrowtail t'[s'/x^\sigma]$ なので，$t'[s'/x^\sigma] \in \mathrm{Comp}_\tau$ であり，任意の $s_1 \rightarrowtail s_1', \ldots, s_n \rightarrowtail s_n'$ について，$t'[s'/x^\sigma] s_1' \ldots s_n'$ は強正規化可能となる．したがって，$(\lambda x^\sigma\, t)\, s s_1 \ldots s_n$ も強正規化可能である． ■

定理 3.12 任意の項 t と任意の $s_1 \in \mathrm{Comp}_{\sigma_1}, \ldots, s_n \in \mathrm{Comp}_{\sigma_n}$ について

$$(\ldots(t[s_1/x_1^{\sigma_1}])\ldots)\,[s_n/x_n^{\sigma_1}] \in \mathrm{Comp}_\tau$$

が成り立つ．ただし，τ は t の型とする．

証明 項 t の構成に関する帰納法による．他の場合は明らかなので，$\lambda y^\sigma\, t$ の場合のみを述べる．t を型 τ の項として

$$\lambda y^\sigma\;(\ldots(t[s_1/x_1^{\sigma_1}])\ldots)\,[s_n/x_n^{\sigma_1}] \in \mathrm{Comp}_{\sigma\to\tau}$$

を示せばよいが，帰納法の仮定により，任意の $s \in \mathrm{Comp}_\sigma$ について

$$((\ldots(t[s_1/x_1^{\sigma_1}])\ldots)\,[s_n/x_n^{\sigma_1}])\,[s/y^\sigma] \in \mathrm{Comp}_\tau$$

なので，補題 3.11 によって主張が成り立つ． ■

系 3.13 型 σ の項 t は，すべて Comp_σ に属する．

系 3.14 任意の項 t は，強正規化可能である．

以上の証明は，適当なコード化を経由して，集合 Comp_τ を一律に表す論理式 $C(\tau, x)$ が存在できれば，ペアノ算術の内部で遂行できる．しかし，そうした論理式を仮定すると，容易に矛盾が導けてしまう．他方で，それぞれの型 τ について，Comp_τ を個別に定義する論理式 $C_\tau(x)$ は存在する．

そうした $C_\tau(x)$ を使うと，個々の項 t について，「項 t は強正規化可能である」と述べる文 $\mathrm{Sn}(t)$ を，ペアノ算術の内部で証明することができる．つまり，体系 T の任意の項 t について

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Sn}(t)$$

が成り立つ．しかし，これは体系 T のモデルをペアノ算術の内部で構成できること，そしてその帰結として体系 T の無矛盾性がペアノ算術で証明できることを意味しない．そのためには，「任意の項 t について，t は強正規化可能である」という文が，証明できなければいけないからである．つまり，$\mathrm{Term}(x)$ を「x は体系 T の項である」と述べる論理式として

$$\mathrm{PA} \vdash \forall x\,(\mathrm{Term}(x) \supset \mathrm{Sn}(x))$$

が成り立つことが必要になる．しかし，これは不可能である．

$C_\tau(x)$ は，Comp_τ の定義に沿って再帰的に定義されるので，$C_{\tau_1 \to \tau_2}$ は，C_{τ_1} および C_{τ_2} よりも，論理的に複雑な論理式になる．そのため，$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Sn}(t)$ の導出では，t の型がより複雑になるにしたがって，より複雑な論理式に適用された数学的帰納法が必要になる．

ところで，体系 T の無矛盾性を証明するためには，実際にはチャーチ・ロッサー性と弱正規化可能性を示せば十分である．そして，体系 T の弱正規化可能性は，ゲンツェンによるペアノ算術の無矛盾性と同じようにして，項に割り当てられた順序数に沿った ϵ_0 までの超限帰納法によって証明することができる．

3.3　ペアノ算術のバリエーションへの応用

ダイアレクティカ解釈は，ペアノ算術のさまざまなバリエーションにも，広く応用されている．その際に基本となるのは，つぎの二つの戦略である．まず，ペアノ算術のバリエーションが，そこで許される数学的帰納法の形によって特徴付けられている場合には，再帰演算子を対応したものに変更することで，系 2.4 に相当するウィットネスの存在定理を示せる．また，自然数の集合に関する公理を含む 2 階ペアノ算術の変種に対しては，自然数の集合を特性関数で置き換え，その特性関数の構成を許すような演算子を導入することで，やはりウィットネスの存在を示すことができる．

ここでは，議論の詳細に立ち入ることはせずに，それぞれの場合について，例をあげるだけにしておく[3]．

例 1　ダイアレクティカ解釈で，再帰演算子が本質的に必要になるのは，数学的帰納法で導かれる論理式の解釈に対するウィットネスの構成においてであった．そのため，数学的帰納法の形が変わっている場合には，再帰演算子をそれに応じて変更することで，以前と同様に議論を進めることができる．

たとえば，ψ を量化記号なしの論理式として，数学的帰納法

$$[\phi(0) \land \forall x\,(\phi(x) \supset \phi(\mathrm{S}(x)))] \supset \forall x\,\phi(x)$$

での ϕ が，$\exists y\,\psi$ という形の論理式に制限されている場合を考えよう．こうした形の論理式すべての集合は，通常 Σ_1 とか Σ_1^0 と表記されるので，数学的帰納法をそうした論理式に制限して得られるペアノ算術の部分体系は，$\mathrm{I}\Sigma_1$ と呼ばれている．

$\mathrm{I}\Sigma_1$ で証明可能な論理式をダイアレクティカ解釈して，それにウィットネスをみつけるためには，以下の等式を満たす再帰演算子 $\hat{\mathrm{R}}_\sigma$ で十分である[4]．

3)　この節での紹介は，基本的に [Avigad and Feferman 1998] に拠っている．ただし，元の論文もあげておく．

4)　[Parsons 1970] および [Parsons 1972] を参照．

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{R}}_\sigma(g,h,0,y) = g(y), \\ \hat{\mathrm{R}}_\sigma(g,h,\mathrm{S}(x),y) = h(x,\hat{\mathrm{R}}_\sigma(g,h,x,y),y). \end{cases}$$

ただし，$\mathrm{R}_\sigma(g,h,x,y)$ は型 0 に属する．つまり，通常の原始再帰的定義と同じく，パラメータ y を固定して，等式の左右を型 0 の対象としたうえで，関数を定義するわけである．

再帰演算子を R_σ から $\hat{\mathrm{R}}_\sigma$ に制限すると，型 $0 \to \cdots \to 0 \to 0$ の任意の閉じた項は，原始再帰的関数を表すことが証明できる．そこからさらに，任意の部分再帰的関数 f について，f がすべての自然数に対して定義されていることを $\mathrm{I}\Sigma_1$ で証明できれば，f は原始再帰的であることがわかる．

例 2　多項式時間計算可能関数と対応した体系である限定算術では，通常の数学的帰納法の代わりに，なんらかの論理式の集合 Φ に属する ϕ に制限された，Φ-PIND (polynominal induction) と呼ばれる以下の形の数学的帰納法が使われる．

$$\phi(0) \wedge \forall x \left(\phi\left(\lfloor \tfrac{1}{2}x \rfloor\right) \supset \phi(x)\right) \supset \forall x\, \phi(x).$$

ここで，$\lfloor \frac{1}{2}x \rfloor$ は，$\frac{1}{2}x$ 以下の整数で最大のものを表す．これは，x を表す 2 進数の一番下の桁を削除し，全体を右に 1 桁ずらすことで得られる．

とくに，S^1_2 と呼ばれる限定算術での体系では，ϕ を Σ^b_1 という集合に属する論理式に制限した，Σ^b_1-PIND が使われる．Σ^b_1 は，ペアノ算術での Σ_1 に対応した，限定算術での論理式の集合で，以下のようにして定義される．

まず，自然数 x の長さ $|x|$ を $|x| = \ulcorner \log_2(x+1) \urcorner$ と与えておこう．つまり $|x|$ は，$\log_2(x+1)$ 以上の整数で最小のものであり，$|0| = 0$ である以外は，x を表す 2 進数の桁数となる．

限定算術では，ペアノ算術での量化論理式 $\forall x\, \phi(x)$ および $\exists x\, \phi(x)$ に相当する役割を，t 以下の x に限定された限定量化論理式 $(\forall x \leq t)\, \phi(x)$ および $(\exists x \leq t)\, \phi(x)$ が果たす．ここで，t は x を含まない項である．これと並行して，ペアノ算術での量化記号を含まない論理式には，t の長さ $|t|$ 以下の x に限定された $(\forall x \leq |t|)$ および $(\exists x \leq |t|)$ という形の限定量化のみを含む論理式が対応する．こうした形の限定量化を，強限定量化と呼んでおこう．

Σ_1^b は，強限定量化のみを含む論理式に，存在限定量化 $(\exists x \leq t)$ だけを適用して得られる論理式の集合である．

S_2^1 の言語は，$0, S, +, \cdot, \#, |x|, \lfloor \frac{1}{2}x \rfloor$ および $\leq$ からなる．ここで，$\#$ は，$x \# y = 2^{|x| \cdot |y|}$ を表すことを意図した 2 項関数記号である．これは，十分速く増加する関数を一つ入れておくために，導入されている．S_2^1 の公理は，こうした記号の意図された意味を表す一連の論理式と，Σ_1^b-PIND からなっている．

S_2^1 をダイアレクティカ解釈して，ウィットネスの存在を示すためには，S_2^1 と同様の言語を採用したうえで，R_σ の代わりに，つぎの等式を満たす $\tilde{R}_\sigma$ を使えばよい [Cook and Urquhart 1993].

$$\tilde{R}_\sigma(b, g, h, 0, y) = g(y),$$

$$\tilde{R}_\sigma(b, g, h, S(x), y) = \begin{cases} h(x, \tilde{R}_\sigma(b, g, h, \lfloor \frac{1}{2}x \rfloor, y), y) & (\text{この値の長さが } b(x,y) \text{ よりも厳密に小さい場合}) \\ b(x, y) & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

R_σ の代わりに $\tilde{R}_\sigma$ を使うと，型 $0 \to \cdots \to 0 \to 0$ の任意の閉じた項は，多項式時間計算可能関数を表すことが証明できる．そこからさらに，Σ_1^b に属する論理式によって定義可能な関数は，すべて多項式時間計算可能であることもわかる．

例 3　体系 T は，高次の型をもつ関数を表す項をもっているので，高次の型をもつ関数を表す変数と，それへの量化をペアノ算術に付け加えて得られる体系 PA^ω についても，その直観主義版である体系 HA^ω を経由して，ダイアレクティカ解釈を自然に拡張することができる[5]．それだけではなく，自然数の集合に関するなんらかの存在公理によって，ペアノ算術を拡張して得られる 2 階算術の体系に対しても，ダイアレクティカ解釈はやはり適用されて

5)　[Troelstra 1973] がくわしい．

いる．その際には，R_σ はそのままにしておいて，R_σ とは別の演算子を新たに付け加える．

いわゆる 2 階算術は，自然数の集合を表す 2 階の変数と，集合への帰属関係を表す関係記号 $\in$，および 2 階の量化記号によって拡張されたペアノ算術に，任意の論理式 $\phi(x)$ が定める集合の存在を述べる公理

$$\exists X \forall x\,(x \in X \leftrightarrow \phi(x))$$

を 1 階算術に付け加えた体系である．2 階算術の中では，適当なコード化によって解析学の大部分を展開することができるので，2 階算術は「解析」と呼ばれることもある．

自然数の集合 X を，その特性関数 X_f で置き換えて，$x \in X$ を $X_f(x) = 0$ と表すことにすれば，PA^ω に型 0 の対象に関する選択公理 (AC_{00})

$$\forall x^0 \exists y^0\, \phi(x, y) \supset \exists Y^{0\to 0} \forall x^0\, \phi(x, Yx)$$

を加えた体系 $\mathrm{PA}^\omega + (\mathrm{AC}_{00})$ で，上記の存在公理を導くことができる．さらに，HA^ω に公理として $\phi \leftrightarrow \phi_D$ を付け加えた体系を $\mathrm{HA}^{\#}$ とすると，$\mathrm{PA}^\omega + \mathrm{AC}_{00}$ は，$\mathrm{HA}^{\#}$ にいわゆるバー帰納法 (BI; bar induction) を付け加えた体系 $\mathrm{HA}^{\#} + (\mathrm{BI})$ で，二重否定翻訳を通じて解釈することができる．

バー帰納法は，直観的には，ルートから出発してつぎつぎに枝分かれして得られる木のノードに関する帰納法である．まず，木の任意の枝 f をたどっていくと，必ず性質 ϕ が成り立つノードに出会うとしよう．そして，任意のノード c について，そのすべての子ノードで ϕ が成り立てば，c でもやはり ϕ が成り立つとする．このとき，ルートでも ϕ が成り立つ．なぜなら，ϕ が成り立つノードを，つぎつぎにルート方向に向けてたどっていけるからである．こうした推論を，一つの論理的な規則として述べたものが，バー帰納法である．

バー帰納法では，ある型 σ に属する対象の有限列をノードとする木を考える．ルートとなるのは，長さ 0 つまり空の有限列であり，有限列 c の子ノードとなるのは，c の後ろに型 σ に属する任意の対象 u を付け加えて得られる有限列 $c\hat{\ }u$ である．また，こうした木の枝は，σ に属する対象の無限列，つまりは型 $0 \to \sigma$ の対象 f によって表せる．$\vec{f}(0)$ を空な列，それ以外は

$\vec{f}(k) = \langle f(0), f(1), \ldots, f(k-1)\rangle$ とおいて，$\vec{f}(0), \vec{f}(1), \vec{f}(2), \ldots$ と枝を定めればよい．バー帰納法は，実際には ϕ と補助的な ψ を使って，つぎのように述べられる．

- c と f は，それぞれ σ の有限列と無限列を表すとしたうえで
  1. $\forall f \exists k\, \psi(\vec{f}(k))$
  2. $\forall c\, (\psi(c) \lor \neg\psi(c))$
  3. $\forall c\, (\psi(c) \supset \phi(c))$
  4. $\forall c\, (\forall u\, \phi(c\hat{\ }u) \supset \phi(c))$

  が成り立てば，空な有限列 $\langle\,\rangle$ についても，$\phi(\langle\,\rangle)$ が成り立つ．

$\mathrm{HA}^{\#} + (\mathrm{BI})$ をダイアレクティカ解釈するためには，通常の再帰演算子 R_σ に加えて，バー帰納法に対応する新たな再帰演算子を導入する[6]．まず，型 σ に属する対象からなる長さ k の有限列 $c = \langle c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}\rangle$ を，つぎの条件を満たす型 $0 \to \sigma$ の対象 C と，型 0 の対象 k の対によって表しておく．

$$C(x) = \begin{cases} c_x & (x < k \text{ の場合}) \\ 0^\sigma & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}.$$

ここで，0^σ は，$\forall x^{\tau_1}\, (0^{\tau_1 \to \tau_2} x^{\tau_1} = 0^{\tau_2})$ という形で再帰的に定義される．$\langle C, k\rangle$ が有限列 c を表すとき，C と k をそれぞれ $\hat{c}$ および $\mathrm{length}(c)$ と書くことにしよう．

バー帰納法に対応するのは，つぎの等式を満たす演算子 $B_{\sigma\tau}$ である．

$$B_{\sigma\tau}(G, H, X)(c) = \begin{cases} G(c) & (X(\hat{c}) < \mathrm{length}(c) \text{ の場合}) \\ H(\lambda u\, B_{a\tau}(G, H, X)(c\hat{\ }u), c) & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

$B_{\sigma\tau}$ が表す再帰的定義のスキーマは，バー再帰 (BR; bar recursion) と呼ばれる．

体系 T に $B_{\sigma\tau}$ を付け加えた体系を，T+(BR) と表すことにしよう．T+(BR) では，$\mathrm{HA}^{\#} + (\mathrm{BI})$ をダイアレクティカ解釈し，証明可能な論理式に対するウィットネスの存在を証明することができる．その結果，2 階算術の無矛盾性が，T + (BR) の無矛盾性に還元される．

6) [Spector 1962] および [Howard 1968] を参照．

3.4　ダイアレクティカ圏

圏 (category) とは，一定の構造をもった集合の集まりと，その構造を保存する関数の集まりを，代数的に抽象化して考えたものである．一般に圏 $\mathbf{C}$ は，つぎの条件を満たす「対象」の集まり $\mathbf{C}_0$ と「射」の集まり $\mathbf{C}_1$ からなる．

1. それぞれの射 f には，定義域 $\mathrm{dom}\, f$ と値域 $\mathrm{cod}\, f$ が定められている．f の定義域が A，値域が B であることを，$f : A \to B$ と表す．
2. 任意の二つの射 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ に対して，合成と呼ばれる射 $g \circ f : A \to C$ が定義されている．合成は，結合法則
   - $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

   を満たさなければいけない．
3. それぞれの対象 A について，同一射と呼ばれる射 $\mathrm{id}_A : A \to A$ が存在する．id_A は，任意の $f : B \to A$ と $g : A \to C$ に対して
   - $\mathrm{id}_A \circ f = f$ および $g \circ \mathrm{id}_A = g$

   を満たさなければいけない．

具体的な例をいくつかあげておこう．

- **Set**：集合の集まりと，関数の集まり．
- **Mon**：集合 M の 2 項演算 $(x, y) \mapsto x{\cdot}y$ が，結合法則 $(x{\cdot}y){\cdot}z = x{\cdot}(y{\cdot}z)$ を満たし，かつ，$e \cdot x = x \cdot e = x$ を満たす単位元 $e \in M$ が存在するとき，$(M, \cdot, e)$ はモノイドと呼ばれる．また，モノイド $(M_1, \cdot_1, e_1)$ からモノイド $(M_2, \cdot_2, e_2)$ への関数 $f : M_1 \to M_2$ が

$$f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y), \qquad f(e_1) = e_2$$

  を満たすとき，f はモノイド準同型写像と呼ばれる．モノイドの集まりと，モノイド準同型写像の集まりは，圏 **Mon** をなす．

- **Grp**：群の集まりと，その間の準同型写像の集まり．
- $\mathbf{Vec}_K$：体 K 上のベクトル空間の集まりと，その間の線形写像の集まり．
- **CPO**：半順序 $(D, \sqsubseteq)$ の部分集合 $S \subseteq D$ は，S が空でなく，かつ，任意の $x, y \in S$ に対して，$x \sqsubseteq z$ かつ $y \sqsubseteq z$ を満たす $z \in S$ が存在するときに，「有向」と呼ばれる．任意の有向な $S \subseteq D$ に対して上限 $\sup S$ が存在するとき，半順序 $(D, \sqsubseteq)$ を完備半順序あるいは CPO (complete partial order) と呼ぶ．また，完備半順序 $(D, \sqsubseteq)$ から完備半順序 $(D', \sqsubseteq')$ への単調関数 $f : D \to D'$ が

  $$\text{任意の有向な } S \subseteq D \text{ について，} \sup\{f(x) \mid x \in S\} = f(\sup S)$$

  を満たすとき，f は連続関数と呼ばれる．完備半順序の集まりと，その間の連続関数の集まりは，圏 **CPO** をなす．

圏 $\mathbf{C}$ の対象 A と B に対して，$\mathbf{C}$ の対象 $A \times B$ と射 $\pi_{A,B} : A \times B \to A$ および $\pi'_{A,B} : A \times B \to B$ が

- $\mathbf{C}$ での任意の対象 C と射 $f : C \to A$ および $g : C \to B$ に対して，$\pi_{A,B} \circ h = f$ かつ $\pi'_{A,B} \circ h = g$ を満たす $\mathbf{C}$ での射 $h : C \to A \times B$ が，正確にただ一つ存在する

という条件を満たすとき，三つ組 $(A \times B, \pi_{A,B}, \pi'_{A,B})$ は A と B のデカルト積と呼ばれる．そのとき，上記の h は $\langle f, g\rangle$ と表記される．$\mathbf{C}$ の任意の二つの対象に対して，それらのデカルト積が存在するとき，$\mathbf{C}$ はカルテジアン圏と呼ばれる．

カルテジアン圏 $\mathbf{C}$ での二つの対象 A と B に対して，$\mathbf{C}$ の対象 B^A が

- $\mathbf{C}$ の任意の対象 C について，$A \times C$ から B への $\mathbf{C}$ での射すべての集合 $\mathbf{C}(A \times C, B)$ と，C から B^A への射すべての集合 $\mathbf{C}(C, B^A)$ の間に「自然な」一対一対応が存在する[7)]

7) 「自然な」というのは，射の合成によっても保存される，という意味である．

という条件を満たすとき，B^A はベキ対象と呼ばれる．カルテジアン圏 $\mathbf{C}$ の任意の二つの対象 A と B に対して，ベキ対象が存在するとき，$\mathbf{C}$ はカルテジアン閉圏と呼ばれる．

カルテジアン閉圏では，命題を対象，連言をデカルト積，含意をベキ対象によって解釈することで，連言と含意だけからなる直観主義的な命題論理を解釈することができる．さらに，その際には，命題だけではなく，証明も射によって解釈できる．同様に，単純型付き λ 計算についても，型を対象，項を射によって解釈できる．

先にあげた中では，**Set** と **CPO** が，カルテジアン閉圏である．とくに，**CPO** は，λ 計算の意味論の研究で，重要な位置をしめている．

カルテジアン閉圏ではないが，デカルト積よりも弱い積に関して，ベキ対象をもつ圏もある．デカルト積には

$$\pi_{A,B} : A \times B \to A, \qquad \pi'_{A,B} : A \times B \to B,$$
$$\langle \mathrm{id}_A, \mathrm{id}_A \rangle : A \to A \times A$$

の 3 種類の射が必ず伴う．しかし，こうした射の存在を要求しないで，ちょうどモノイドと同じように，単位対象の存在と，結合法則だけを条件として，積を考えることもできる．そうした積は，モノイダル積とかテンソル積と呼ばれ，しばしば $A \otimes B$ と表記される．

モノイダル積をもつ圏 $\mathbf{C}$ は，モノイダル圏と呼ばれる．さらに，交換法則にあたる射 $A \times B \to B \times A$ が $\mathbf{C}$ に存在する場合には，$\mathbf{C}$ は対称モノイダル圏と呼ばれる．また，対称モノイダル圏 $\mathbf{C}$ での任意の二つの対象 A と B に関して，対象 $A \multimap B$ が存在し，$A \otimes C$ から B への射すべての集合 $\mathbf{C}(A \otimes C, B)$ と C から $A \multimap B$ への射すべての集合 $\mathbf{C}(C, A \multimap B)$ との間に「自然な」一対一対応があるとき，$\mathbf{C}$ は，対称モノイダル閉圏と呼ばれる．

対称モノイダル閉圏の典型的な例は，ベクトル空間と線形写像の圏 $\mathbf{Vec}_K$ である．あるいは，より一般的に，可換環 K 上の加群と線形写像の圏は，対称モノイダル閉圏である．

対称モノイダル閉圏では，連言と含意だけからなる直観主義的な命題線形論理を解釈することができる．線形論理とは，「A かつ B，ならば A」，「A

かつ B，ならば B」および「A ならば，A かつ A」という命題が妥当とはならない論理である．このような連言「A かつ B」は，ちょうどモノイダル積に対応しており，やはり $A \otimes B$ と表記されるのがふつうである．

実は，ゲーデルのダイアレクティカ解釈を，命題論理に関する部分に限って考えると，そこで使われている構成を一般化して，対象モノイダル閉圏をつくることができる．これは，ダイアレクティカ圏と呼ばれている[8)]．

ダイアレクティカ圏は，適当な条件を満たすカルテジアン閉圏 $\mathbf{C}$ に基づいてつくられる．$\mathbf{C}$ に基づくダイアレクティカ圏 (Dialectica category) を $\mathbf{DC}$ で表そう．

$\mathbf{DC}$ の対象は，$\mathbf{C}$ の対象 U と X からつくられるデカルト積 $U \times X$ の部分対象である．部分対象というのは，部分集合の概念を圏論ふうに表現したものであり，基本的には部分集合のことだと思っておいてかまわない．

対象のこうした定義は，自由変数をもたない命題 ϕ のダイアレクティカ解釈 $\phi^D \equiv \exists u \forall x\, \phi_D(u,x)$ での $\phi_D(u,x)$ を一般化したものである．$\phi_D(u,x)$ は，u の型を U，x の型を X とすると

$$\{(u,x) \in U \times X \mid \phi_D(u,x)\}$$

という $U \times X$ の部分集合を定めている．そこで，一般に $U \times X$ の部分対象を $\mathbf{DC}$ の対象としたわけである．

$\mathbf{DC}$ での射は，含意 $\phi \supset \psi$ のダイアレクティカ解釈

$$\exists xv \forall uy\, \phi_D(u, xuy) \supset \psi_D(vu, y)$$

に対するウィットネスの対 $(\bar{x}, \bar{v})$ を一般化して得られる．$\mathbf{DC}$ での対象 $\alpha = \{(u,x) \in U \times X \mid \alpha(u,x)\}$ と $\beta = \{(v,y) \in V \times Y \mid \beta(v,y)\}$ を考えてみよう．このとき α から β への射は

$$\{(u,y) \in U \times Y \mid \alpha(u, g(u,y))\} \subseteq \{(u,y) \in U \times Y \mid \beta(f(u), y)\}$$

を満たす $\mathbf{C}$ での射 $f : U \to V$ と $g : U \times Y \to X$ の順序対 (f, g) として定義される．

8) [de Paiva 1991] および [Hyland 2002] を参照．

DC は，直観主義的な命題線形論理の圏論的なモデルとなるが，ダイアレクティカ解釈の定義をつぎのように変えてやると，それに対応した形で，古典的な命題線形論理の圏論的モデル **GC** (Girard category) を得ることもできる．

1. ϕ が原子論理式であれば，ϕ^D は ϕ それ自身である．
2. $(\phi \otimes \psi)^D \equiv \exists uv \forall xy\, (\phi_D(u, xv) \wedge \psi_D(v, yu))$.
3. $\left(\phi^{\perp}\right)^D \equiv \exists x \forall u\, \neg \phi_D(u, x)$.
4. $(\phi \multimap \psi)^D \equiv \exists xv \forall uy\, (\phi_D(u, xy) \supset \psi_D(vu, y))$.

ここで，$\phi \otimes \psi, \phi^{\perp}, \phi \multimap \psi$ は，それぞれ線形論理での連言，否定，含意である．**GC** の対象は，やはり **C** の対象 U と X から得られるデカルト積 $U \times X$ の部分対象であるが，$\alpha = \{(u, x) \in U \times X \mid \alpha(u, x)\}$ から $\beta = \{(v, y) \in V \times Y \mid \beta(v, y)\}$ への射は

$$\{(u, y) \in U \times Y \mid \alpha(u, g(y))\} \subseteq \{(u, y) \in U \times Y \mid \beta(f(u), y)\}$$

を満たす $f : U \to V$ と $g : Y \to X$ の順序対 (f, g) として，すっきりと定義できる．そのため，$U \times X$ での U をポジティブ，X をネガティブと呼ぶことにすると，否定はポジティブとネガティブの反転となり，古典論理でみられるような，完全な対称性が得られる．

さらに，こうしたダイアレクティカ解釈は，限量子のダイアレクティカ解釈をつぎのように変えることで，古典的な 1 階述語線形論理にも拡張できる[9]．

1. $(\forall z\, \phi)^D \equiv \exists u \forall zx\, \phi_D(uz, x, z)$.
2. $(\exists z\, \phi)^D \equiv \exists zu \forall x\, \phi_D(u, xz, z)$.

これに対応して，**GC** を指標付き圏 $X \mapsto \mathbf{GC}(X)$ の形に拡張すると，それは圏論でいうハイパードクトリン[10]となる．

---

9) これは筆者の最近の結果 [Shirahata] である．

10) ハイパードクトリンとは，1 階述語論理の圏論的モデルで，ローヴェアによって導入された [Lawvere 1969].

参考文献

[Avigad and Feferman 1998] Avigad, J. and Feferman, S., "Gödel's functional interpretation," [Bus 1998] の第 5 章, pp. 337–405.

[Brouwer 1929] Brouwer, L. E. J., "Mathematics, Science, and Language," [Mancosu 1998] 所収, pp. 45–53.

[Bus 1998] Buss, S. (ed.), *Handbook of Proof Theory*, Elsevier (1998).

[Cook and Urquhart 1993] Cook, S. A. and Urquhart, A., "Functional interpretations of feasibly constructive arithmetic," *Annals of Pure and Applied Logic,* **63** (1993), 103–200.

[de Paiva 1991] de Paiva, V., *The Dialectica Categories*, Technical Report 213, University of Cambridge, Computer Laboratory (1991).

[Dekker 1962] Dekker, J. C. E. (ed.), *Recursive Function Theory: Proc. Symposia in Pure Mathematics,* AMS (1962).

[Feferman *et al.* 1990] Feferman, S. Dawson, Jr. J. W., Kleene, S.C., Moore, G. H., Solovay, R. M. and van Heijenoort, J. (eds.), *Collected Works*, Vol. II, Oxford University Press (1990).

[Gentzen 1936] Gentzen, G., "Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie," *Mathematische Annalen,* **112** (1936), 493–565.

[Gödel 1958] Gödel, K., "Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes," [Feferman *et al.* 1990] 所収, pp. 240–251.

[Gödel 1972] Gödel, K., "On an extension of finitary mathematics which has not yet been used," [Feferman *et al.* 1990] 所収, pp. 271–280.

[Hilbert 1925] Hilbert, D., "On the inifinite," [van Haijenoort 1967] 所収, pp. 367–392.

[Hindley and Seldin 1986] Hindley, J. R. and Seldin, J. P., *Introduction to Combinators and λ-Calculus*, Cambridge University Press (1986).

[Howard 1968] Howard, W. A., "Functional interpretation of bar induction by bar recursion," *Compositio Mathematica,* **20** (1968), 107–124.

[Hyland 2002] Hyland, J. M. E., "Proof theory in the abstract," *Annals of Pure and Applied Logic*, **114** (2002), 43–78.

[Kino *et al.* 1970] Kino, A., Myhill, J. and Vesley, R. E. (eds.), *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland (1970).

[Lawvere 1969] Lawvere, F. W.,"Adjointness in foundations," *Dialectica*, **23** (1969), 281–296.

[Mancosu 1998] Mancosu, P., *From Brower to Hilbert, The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford University Press (1998).

[Parsons 1970] Parsons, C., "On a number-theoretic choice scheme and its relation to induction," [Kino *et al.* 1970] 所収, pp. 459–473.

[Parsons 1972] Parsons, C., "On n-quantifier induction," *Journal of Symbolic Logic,* **37** (1972), 466–482.

[Parsons 1983] Parsons, C., *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, Cornell University Press (1983).

[Pohlers 1989] Pohlers, W., *Proof Theory, An Introduction*, LNM 1407, Springer-Verlag (1989).

[Poincaré 1906] Poincaré, H., "Les mathématiques et la logique," *Revue de métaphysique et de morale,* **14** (1906), 294–317. 改変されて [Poincaré 1996] の II 章 V 節になっている.

[Poincaré 1996] Poincaré, H., *Science and Method,* with a new introduction by Andrew Pyle, Routledge/Thoemmes Press (1996). 邦訳：吉田洋一訳『科学と方法』岩波文庫，岩波書店 (1953).

[Russell 1908] Russell, B., "Mathematical logic as based on the theory of types," [van Haijenoort 1967] 所収，pp. 150–182.

[Russell 1978] Russell, B., *Principia Mathematica,* paperback edition, Cambridge University Press (1978).

[Shirahata] Shirahata, M., "The dialectica interpretation of first-order classical affine logic," to appear in *Theory and Applications of Categories.*

[Spector 1962] Spector, C., "Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics," pp. 1–27.

[Tait 2005] Tait, W. W., "Gödel's reformulation of Gentzen's first consistency proof for arithmetic: The no-counterexample interpretation," *Bulletin of Symbolic Logic,* **11**, no. 2 (2005), 225–238.

[Troelstra 1973] Troelstra, A. S. (ed.), *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithemetic and Analysis,* LNM 344, Springer (1973).

[van Haijenoort 1967] van Haijenoort, J. (ed.), *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Harvard University Press (1967).

[Weyl 1921] Weyl, H., "On the new foundational crisis of mathematics," [Mancosu 1998] 所収，pp. 86–118.

[Zermelo 1908] Zermelo, E., "Investigations in the foundations of set theory I," [van Haijenoort 1967] 所収，pp. 199–215.

用語索引

サ　行

マ 行

ヤ 行

ラ 行

人名索引

ア 行

カ 行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ 行

ラ 行

ワ 行

執筆者紹介（掲載順．*は編者）

田中一之*（たなか・かずゆき）[序]

1955 年生まれ．カリフォルニア大学バークレー校博士課程修了．現在，東北大学大学院理学研究科教授．Ph.D.
[主要著書]『数学基礎論講義：不完全性定理とその発展』（編著，日本評論社，1997），『逆数学と 2 階算術』（河合出版，1997），『数の体系と超準モデル』（裳華房，2002），『数学のロジックと集合論』（共著，培風館，2003）など．

鹿島　亮（かしま・りょう）[第 I 部]

1965 年生まれ．東京工業大学大学院博士課程中退．現在，東京工業大学大学院情報理工学研究科助教授．博士（理学）．
[主要著書]『数学基礎論講義：不完全性定理とその発展』（共著，日本評論社，1997）．

山崎　武（やまざき・たけし）[第 II 部]

1972 年生まれ．東北大学大学院理学研究科博士課程修了．現在，東北大学大学院理学研究科助教授．博士（理学）．
[主要論文] “Some conservation results on weak König's lemma”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **118** (2002), no. 1–2, 87–114（共著）．

白旗　優（しらはた・まさる）[第 III 部]

1961 年生まれ．京都大学大学院文学研究科博士課程単位取得退学．現在，慶應大学商学部助教授．Ph.D.（スタンフォード大学）．
[主要論文・翻訳] “Phase-valued models of linear set theory”, Proceedings of the 7th and 8th Asian Logic Conferences (2003), pp.377–397, “A linear conservative extension of Zermelo-Fraenkel set theory,” *Studia Logica*, **56** (1996), 361–392,『論理学の基礎と演習』（バーワイズ・エチメンディ著，共訳，慶應義塾大学出版会，2006）など．

ゲーデルと 20 世紀の論理学(ロジック) ③
不完全性定理と算術の体系

2007 年 3 月 15 日　初版

[検印廃止]

編者　田中一之
発行所　財団法人　東京大学出版会
代表者　岡本和夫
113–8654 東京都文京区本郷 7–3–1 東大構内
電話 03–3811–8814　　Fax 03–3812–6958
振替 00160–6–59964
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　矢嶋製本株式会社

ISBN978–4–13–064097–8

Printed in Japan